2011. november 5.

KÖMAL Ankét

előadás

XX.
Nemzetközi Magyar Matematikaverseny
BONYHÁD, 2011. március 11-15.

Szoldatics József

Tartalom

A Nemzetközi Magyar Matematikaverseny ismertetése

2011. március 11-től 15-ig iskolánk, a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium és Kollégium szervezi a XX. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt.

1992-ben határon túli és hazai matematikatanárok hozták létre ezt a versenyt. Célja az itthoni és a környező országok matematikatanítása közötti kapcsolat szorosabbra fűzése, a tananyagok, a szakmai nyelv használatának összehangolása, és természetesen az eredményesség mérése.

A szakmai célokon túl fontos szerepe van annak, hogy az anyaországi és a környező országokból jött tanulók találkoznak egymással, megismerik egymás gondjait, és a változó helyszíneken az életkörülményeket. A versenyhez kapcsolódó kirándulásokon lehetőség van a Kárpát-medence egy-egy olyan régiójának megismerésére, ahova egyébként kis eséllyel jutnának el a távolról érkező tanulók.

A versenyt páratlan években hazai gimnáziumok szervezik, páros években pedig „körbejár" a Kárpát-medence magyar városaiban.

Az eddigi helyszínek:

1992.: Révkomárom,	1993.: Vác,	1994.: Ungvár	1995.: Paks (ESZI),
1996.: Székelyudvarhely,	1997.: Kaposvár,	1998.: Szabadka,	1999.: Nagykanizsa,
2000.: Dunaszerdahely,	2001.: Debrecen,	2002. Sepsiszentgyörgy,	2003.: Eger,
2004.: Nagydobrony,	2005.: Miskolc,	2006: Zenta,	2007.: Szeged,
2008.: Kassa,	2009.: Gyula,	2010.: Szatmárnémeti.	

A matematikából legjobb 20 magyarországi középiskola 6-6 fős küldöttséggel, Erdély, Felvidék, Délvidék, Kárpátalja összesen kb. 180 fős csapattal vesz részt a versenyen. Zsűritagokkal, meghívott előadókkal együtt ez kb. 320 fős rendezvény, amelynek kb. 80 %-a versenyző tanuló.

Iskolánknak jelentős elismerés, hogy részt vehetünk ezen a rangos versenyen. Tanulóink rendre a díjazottak között szerepelnek, így természetes, hogy mi is sorra kerültünk a rendezésben. Szatmárnémetiben bejelentettük, hogy **2011-ben iskolánk szervezi a huszadik versenyt.**

A verseny szokásrendje szerint a rendezés teljes költségeit a rendező város és iskola állja. A határon túli résztvevőktől nem lehet hozzájárulást kérni, nekik sokszor még az utazás költségei is nagy terhet jelentenek. Így minden alkalommal a rendezők próbálnak anyagi forrásokat keresni. 360 főnek **az öt napos rendezvény költsége kb. 8 000 000 Ft.** Ezt egy Szeged, Miskolc, Kassa méretű városban sem volt könnyű előteremteni, de egy kisvárosnak, ill. kisvárosi gimnáziumnak csak külső támogatók segítségével sikerülhet.

Ez a rendezvény rendkívül fontos szerepet tölt be a magyar-magyar kapcsolatokban, és a Kárpát-medence tehetséggondozásában, matematikatanításában. A résztvevő kb. 260 diákon és 60 tanáron túl ennek sokszorosa a versennyel kapcsolatba kerülők száma, hiszen többfordulós válogatók után jutnak ide a legjobbak. A felkészülés során több ezer tanuló használja a korábbi versenyek feladatait, ötleteit, és több száz tanár válogat a rendszeresen publikálásra kerülő szakmai anyagból. A program a szakmai kapcsolaton túl színvonalas kulturális rendezvényekkel egészül ki. Nem véletlen, hogy a rendezvény hosszú távon bizonyította működőképességét.

Adatok

Ssz.	Város	Oktatási intézmény	Résztvevők száma
1	Zenta	Bolyai Tehetséggondozó Gimnázium	14
2	Bácstopolya	Dositej Obradović Gimnázium	1
3	Ada	Műszaki Középiskola	1
4	Szabadka	Svetozar Marković Gimnázium	4
5	Nagyvárad	Ady Endre Líceum	1
6	Brassó	Áprily Lajos Főgimnázium	2
7	Nagyszalonta	Arany János főgimnázium	1
8	Barót	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont	1
9	Kolozsvár	Báthory István Elméleti Liceum	8
10	Marosvásárhely	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	9
11	Szatmárnémeti	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	3
12	Csíkszereda	Márton Áron Gimnázium	11
13	Nagyvárad	Mihai Eminescu Főgimnázium	1
14	Sepsiszentgyörgy	Mikes Kelemen Elméleti Líceum	1
15	Kézdivásárhely	Nagy Mózes Elméleti Liceum	1
16	Margitta	Octavian Goga Főgimnázium	1
17	Gyergyószentmiklós	Salamon Ernő Gimnázium	1
18	Zilah	Silvania Fogimnazium	1
19	Sepsiszentgyörgy	Székely Mikó Kollégium	6
20	Székelyudvarhely	Tamási Áron Gimnázium	7
21	Zselíz	Comenius Gimnázium	2
22	Léva	Egyházi Gimnázium	1
23	Ógyalla	Építőipari Szakközépiskola	2
24	Galánta	Kodály Zoltán Gimnázium	2
25	Somorja	Madách Imre Gimnázium	1
26	Dunaszerdahely	Magángimnázium	3
27	Ipolyság	Magyar Tanítási Nyelvű Gimnázium	2
28	Pozsony	Magyar Tannyelvű Gimnázium	1
29	Tornalja	Magyar Tannyelvű Gimnázium	1
30	Kassa	Márai Sándor Gimnázium	6
31	Érsekújvár	Pázmány Péter Gimnázium	3
32	Komárom	Selye János Gimnázium	8
33	Szenc	Szenczi Molnár Albert Gimnázium	1
34	Bátyú	Bátyúi Középiskola	2
35	Beregszász	Beregszászi Magyar Gimnázium	7
36	Salánk	Mikes Kelemen Középiskola	1
37	Mezőkaszony	Kaszonyi Középiskola	1
38	Mezővári	Mezővári II. Rákóczi Ferenc Középiskola	1
39	Munkács	Munkácsi 3sz. középiskola	1
40	Nagybereg	Nagyberegi Református Líceum	3
41	Nagydobrony	Nagydobronyi Középiskola	1
42	Nagydobrony	Nagydobronyi Református Liceum	1

Ssz.	Város	Oktatási intézmény	Résztvevők száma
43	Kisvárda	4600, Kisvárda Iskola tér 2.	1
44	Békéscsaba	Andrássy Gyula Gimnázium és Kollégium	1
45	Budapest	Árpád Gimnázium	1
46	Kecskemét	Bányai Júlia Gimnázium	4
47	Nagykanizsa	Batthyány Lajos Gimnázium	5
48	Budapest	Berzsenyi Dániel Gimnázium	4
49	VÁC	Boronkay György Műszaki Középisk.és Gimn.	4
50	Debrecen	DE Kossuth L. Gyakorló Gimnáziuma	1
	Tata	Eötvös József Gimnázium	4
	Gyula	Erkel Ferenc Gimnázium	2
	Paks	ESZI	2
	Budapest	Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Gimnázium	5
	Debrecen	Fazekas Mihály Gimnázium	4
	Miskolc	Földes Ferenc Gimnázium	5
	Baja	III. Béla Gimnázium	3
	Pécs	Janus Pannonius Gimnázium	5
	Nyíregyháza	Krúdy Gyula Gimnázium	2
	Győr	Krúdy Gyula Középiskola	1
	Veszprém	Lovassy László Gimnázium	2
	Bonyhád	Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium	12
	Szeged	Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium	5
	Győr	Révai Miklós Gimnázium	3
	Békéscsaba	Széchenyi I. Két Tanítási Ny.Közg. Szakközépisk.	1
	Nyíregyháza	Szent Imre Katolikus Gimnázium	1
	Eger	Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium	4
	Kaposvár	Táncsics Mihály Gimnázium	5
	Keszthely	Vajda János Gimnázium	1
	Paks	Vak Bottyán Gimnázium	4
	Brüsszel	Ecole Européenne de Bruxelles I Uccle	2
		Tanuló összesen	220
		Tanár összesen	82

Oláh György, Komárom

Oldjuk meg a $3^y = x^2 - 22x + 40$ egyenletet a pozitív egész számok halmazán.

Megoldás:
Az egyenlet jobb oldalát szorzattá alakítva, majd az egyenlet két oldalát felcserélve kapjuk:

$$(x-2)(x-20) = 3^y \qquad (1)$$

Legyen $x - 2 = 3^m$; $x - 20 = 3^n$, ahol m + n = y

$3^m - 3^n = x - 2 - (x - 20) = 18$; $3^m > 3^n$ => m > n

$3^2 (3^{m-2} - 3^{n-2}) = 3^2 \cdot 2 \quad /:3^2$

$3^{m-2} - 3^{n-2} = 2$

$(3^{m-n} - 1)3^{n-2} = 2$

n – 2 = 0 => n = 2; m – n = m – 2 = 1 => m = 3

x-2 = $3^m = 3^3 = 27$ => x = 29. Ezt visszahelyettesítve az (1)-be

$(29 - 2)(29 - 20) = 3^y \Rightarrow 3^y = 27 \cdot 9$

$3^y = 3^5$

y = 5

Tehát az egyenletet az x = 29 és y = 5 pozitív egész számok elégítik ki.

--

$3^y = (x-2)(x-20)$ itt a két szorzat között 18 a különbség!

3 hatványai: 1; 3; 9; 27; 81; …

27-9=18 teht x=29 és y=5

Balázsi Borbála, Beregszász

Bizonyítsd be, hogy az alábbi sorozatok mindegyikében végtelen sok összetett szám van!

a) $2^2+1,\ \ 4^2+1,\ \ 6^2+1,\ \ 8^2+1,\ \dots$

b) $4^2+1,\ 14^2+1,\ 24^2+1,\ 34^2+1, \dots$

Megoldás:

a) $x_n = (2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1$**,** ahol n pozitív egész**.** Ha n utolsó számjegye 1, akkor x_n utolsó számjegye 5 . Ezért x_n osztható 5-tel. Ha $n > 1$, $x_n > 5$,azaz x_n összetett szám.

b) $x_n = (10(n-1)+4)^2 + 1 = 100(n-1)^2 + 80(n-1) + 17$, ahol n pozitív egész**.** Ha $n = 17k + 1$, ahol k pozitív egész, x_n osztható 17-tel és nagyobb 17-nél, ezért összetett szám.

--

a.) n=2k², akkor $n^2 + 1 = (2k^2)^2 + 1 = 4k^4 + 1 = 4k^4 + 4k^2 + 1 - 4k^2 = (2k^2+1)^2 - (2k)^2$

b.) n=10A+4 akkor A=17k és A=17k+6

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, . . . 28 számokat. Egy-egy alkalommal letörlünk két a és b számot, s helyettük felírjuk az ab + 2a + 2b + 2 számot. Ezt ismételve 27-szer, csak egy szám fog maradni. Melyik ez a szám?

Megoldás:
ab + 2a + 2b + 2 = (a + 2)(b + 2) − 2 felírás alapján az S = (a + 2)(b + 2)(c + 2)(d + 2) . . . stb, szorzat nem változik. Ez ebben az esetben (28 + 2)! : 2 = 30! : 2 . Az utolsó felírt szám ennek alapján: $\frac{30!}{2} - 2$.

Szabó Magda, Szabadka

A 10x10 –es táblázatban bekeretezünk minden sorban és oszlopban egy-egy számot, tehát összesen 10 elemet. Van-e ezen elemek között mindig legalább két azonos szám?

0 1 2 … 9
9 0 1 … 8
8 9 0 … 7
……………
1 2 3 … 0

Megoldás:
A táblázatban minden elem kongruens a sora és oszlopa első elemének összegével modulo 10 szerint, tehát a bekarikázott számok összege (0+1+2+…+9)+(0+9+8+…+1)=90 azaz osztható 10-zel. Ha minden kiválasztott szám különböző lenne akkor 0+1+2+…+9=45 és ez nem osztható tízzel azaz a bekarikázott számok között van legalább két azonos.

Katz Sándor, Bonyhád

Állapítsuk meg az $A = x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha *x* pozitív valós szám.

Megoldás:

Vegyük észre, hogy ha $B = x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$**,** akkor *AB*=2. Tehát *A = 2/B.*

Mivel *B* minden pozitív *x*-re pozitív, ezért *A* is pozitív.

Ha *x* nagy, vagy *x* közel van 0-hoz, akkor *B* tetszőlegesen nagy értéket vesz fel, ezért *A* tetszőlegesen közel kerül 0-hoz, így A-nak minimuma nincs, (alsó határa 0).

Tudjuk, hogy ha *x* pozitív, akkor $x+\frac{1}{x}\ge 2$, ezért *B* minimuma $2+\sqrt{2}$.

Tehát A legnagyobb értéke $\frac{2}{2+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$, ezt *x*=1 esetén veszi fel.

--

Ha $x=tg\alpha$, akkor

$$A=tg\alpha+ctg\alpha-\sqrt{tg^2\alpha+ctg^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{4-2\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha}{2+\sqrt{4-2\sin^2 2\alpha}}\le\frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

--

Ha $a=x^2+\frac{1}{x^2}$ akkor $A=\sqrt{a+2}-\sqrt{a}=\frac{2}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a}}$ $\qquad a\ge 2$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Igazoljuk, hogy: $\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}<\frac{2}{3}$ bármely $n\ge 1$ esetén.

Megoldás:

Az összeg egy tetszőleges tagja: $\frac{2^k}{1+2^{2^k}}$. Ezt bővítjük és alakítjuk úgy, hogy felbonthassuk két tört összegére.

$$\frac{2^k}{1+2^{2^k}}=\frac{2^k(2^{2^k}-1)}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}=\frac{2^k\cdot 2^{2^k}-2^k}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}=\frac{2^k\cdot 2^{2^k}+2^k-2^{k+1}}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}=\frac{2^k(2^{2^k}+1)-2^{k+1}}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}$$

$$=\frac{2^k(2^{2^k}+1)}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}-\frac{2^{k+1}}{(1+2^{2^k})(2^{2^k}-1)}=\frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}.$$

Ennek alapján: $\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{1+2^{2^k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{2^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}\right)=$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}<\frac{2}{3}.$$

Általánosítás: $\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \dots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{p^{2^k}-1}-\frac{2^{k+1}}{p^{2^{k+1}}-1}\right)=$

$\frac{2}{p^2-1}-\frac{2^{n+1}}{p^{2^{n+1}}-1}<\frac{2}{p^2-1}$, ha $p>1$.

Például $p=\frac{5}{3}$ esetén: $\frac{2\cdot 3^2}{5^2+3^2}+\frac{2^2\cdot 3^{2^2}}{5^{2^2}+3^{2^2}}+\ \dots\ +\frac{2^n\cdot 3^{2^n}}{5^{2^n}+3^{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k\cdot 3^{2^k}}{5^{2^k}+3^{2^k}}<\frac{9}{8}$.

--

Eredeti helyett 1/3-ot mind a két oldalhoz adva $\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}<1$

a feladat.

Számolva az elemeket:

$\frac{1}{3}<1$ *hiányzik* $\frac{2}{3}=\frac{2}{2^{2^1}-1}$

$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}$ *hiányzik* $\frac{4}{15}=\frac{2^2}{2^{2^2}-1}$

$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{17}=\frac{247}{255}$ *hiányzik* $\frac{8}{255}=\frac{2^3}{2^{2^3}-1}$

Sejtés: $\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots+\frac{2^n}{1+2^{2^n}}=1-\frac{2^{n+1}}{2^{2^{n+1}}-1}$

Ezt teljes indukcióval!

I. Kész!

II. Tf. n=k-ra $\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots+\frac{2^k}{1+2^{2^k}}=1-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}$ igaz

III. n=k+1-re

$$\frac{1}{1+2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^{2^2}}+\dots+\frac{2^k}{1+2^{2^k}}+\frac{2^{k+1}}{1+2^{2^{k+1}}}=1-\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}-1}+\frac{2^{k+1}}{2^{2^{k+1}}+1}=$$

$$=1+2^{k+1}\left(\frac{1}{2^{2^{k+1}}+1}-\frac{1}{2^{2^{k+1}}-1}\right)=1+2^{k+1}\frac{2^{2^{k+1}}-1-2^{2^{k+1}}-1}{\left(2^{2^{k+1}}+1\right)\left(2^{2^{k+1}}-1\right)}=1+2^{k+1}\frac{-2}{\left(2^{2^{k+1}}+1\right)\left(2^{2^{k+1}}-1\right)}=$$

$$=1-\frac{2^{k+2}}{\left(2^{2^{k+1}}\right)^2-1}=1-\frac{2^{k+2}}{2^{2^{k+2}}-1}$$

Az általánosítás ugyanígy működik:

$\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \dots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}$

helyett

$\frac{1}{1+p}+\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \dots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}<\frac{2}{p^2-1}+\frac{1}{p+1}=\frac{1}{p-1}$

helyett az élesebb

$$\frac{1}{1+p}+\frac{2}{1+p^2}+\frac{2^2}{1+p^{2^2}}+\ \ldots\ +\frac{2^n}{1+p^{2^n}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{1+p^{2^k}}=\frac{1}{p-1}-\frac{2^{n+1}}{p^{2^{n+1}}-1}$$

és ez megy indukcióval természetesen!

Balázsi Borbála, Beregszász

x, y számokról tudjuk, hogy $x > y$ és $xy = 1$. Bizonyítsd be, hogy $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$!

Megoldás:

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+2$ és $x-y>0$. Akkor

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2}{x-y}=(x-y)+\frac{2}{x-y}\geq 2\sqrt{(x-y)\cdot\frac{2}{x-y}}=2\sqrt{2}$$

--

Induljunk ki a következő igaz állításból:

$$\left(x-y-\sqrt{2}\right)^2\geq 0$$

$$x^2+y^2+2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2xy\geq 0$$

$$x^2+y^2+2-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-2\geq 0$$

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y$$

$$x^2+y^2\geq 2\sqrt{2}(x-y)$$

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}\geq 2\sqrt{2}$$

--

Legyen $x = tg\alpha$ $\qquad y = ctg\alpha$

ekkor

$$\frac{ctg^2\alpha+tg^2\alpha}{cgt\alpha-tg\alpha}\geq 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\sin\alpha\cos\alpha}\geq 2$$

$$\frac{2-\sin^2 2\alpha}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} \geq 2\sqrt{2}$$

$$2-\frac{1-\cos 4\alpha}{2} \geq \sqrt{2}\sin 4\alpha$$

$$3 \geq 2\sqrt{2}\sin 4\alpha - \cos 4\alpha \qquad \sin\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3};\ \cos\varphi = \frac{1}{3} \qquad 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$$

$$1 \geq \sin(4\alpha - \varphi)$$

Egyenlőség

$$4\alpha - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\alpha = \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$$

$$x = ctg\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$$

Borbély József, Tata

Jelölje tetszőleges pozitív egész n szám esetén t(n) az n szám különböző prímosztóinak számát. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan pozitív egész n szám van, amelyre

a, t(n^2+n) páratlan

b, t(n^2+n) páros.

Megoldás

Mivel n és n+1 minden pozitív egész n-re relatív prímek, ezért t(n)+t(n+1)=t(n^2+n). Színezzük azokat a pozitív egész k számokat, amelyekre t(k) páratlan, pirossal, és azokat, amelyekre t(k) páros, kékkel. Ekkor végtelen sok piros és végtelen sok kék szám keletkezik.

Induljunk el egy tetszőleges kék számtól és mindig adjunk hozzá egyet. Véges sok lépés után egy piros számhoz jutunk. Tehát ilyen típusú lépésekkel végtelen sok olyan (n,n+1) számpár található, amelyekre t(n) páros és t(n+1) páratlan. Ezekre a pozitív egész n számokra t(n^2+n) páratlan, ezzel a feladat a, részét beláttuk.

A b, rész megoldásához definiáljuk a következő A_k halmazokat: az A_k halmaz elemei legyenek a 4^k,4^k+1, 4^k+2, ….., 3*4^k számok, ahol * a szorzást jelenti (k=1, 2, 3, 4,……). Az ily módon definiált A_k halmazok páronként diszjunktak és a legkisebb elemük piros, míg a legnagyobb elemük kék. Mindegyik $A_k$halmaznak páratlan sok eleme van. Azt állítjuk, hogy mindegyik ilyen halmazban van két szomszédos egyszínű szám. Tegyük fel indirekt, hogy ez nem igaz. Ekkor induljunk el a legkisebb elemtől, ami piros: innentől egyesével továbbhaladva a színek felváltva következnek, azaz a páros számok színe piros, a páratlanoké pedig kék az indirekt feltevés szerint. De ez azt jelentené, hogy a halmaz legnagyobb eleme, 3*4^k is piros lenne, ami ellentmondás. Tehát minden $A_k$halmaz tartalmaz olyan (n,n+1) számpárt, amelyre t(n) és t(n+1) paritása azonos, ezekre t(n^2+n) páros lesz. Mivel az $A_k$halmazok páronként diszjunktak, ezért a b, állítás is bizonyítást nyert.

--

$$t(ab) = t(a) + t(b) \qquad ha\ (a;b) = 1$$

$$t(n^2+n) = t(n(n+1)) = t(n) + t(n+1)$$

t(k) páratlan, pirossal, és azokat, amelyekre t(k) páros, kékkel.

Bizonyítani, hogy egymás után végtelen sokszor következik két azonos színű és végtelen sokszor következik két eltérő színű.

$t(2^n) = piros \qquad t(2*3^n) = kék$
$t(3^n) = piros \qquad t(3*5^n) = kék$

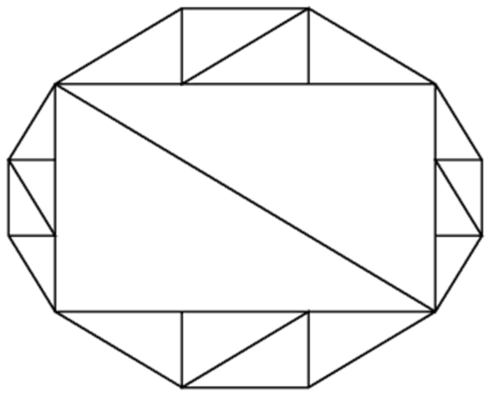
Végtelen sok páros piros, végtelen sok páros kék
Végtelen sok páratlan piros, végtelen sok páratlan kék

Ez már elég. ugyanis
Ha egy idő után csak egy szín lenne, ellentmondás
Ha egy idő után csak váltakozna, ellentmondás

Kiss Sándor, Nyíregyháza

Legfeljebb hány oldalú lehet egy olyan konvex sokszög, amely feldarabolható olyan derékszögű háromszögekre, amelyek hegyesszögei 30 és 60 fokosak? (Megjegyzés: a feldarabolás során csak ilyen háromszög keletkezhet, másféle sokszög nem)

Megoldás:



Tegyük fel, hogy egy konvex sokszög feldarabolható a kívánt módon. Mivel a felosztásban szereplő háromszögek minden szöge 30^o egész számú többszöröse, ugyanez igaz a sokszög minden egyes szögére, vagyis azok legfeljebb 150^o-os szögek lehetnek. Ennek megfelelően a sokszög minden külső szöge legfeljebb 30^o-os. Mivel ezek összege 360^o, a sokszögnek legfeljebb 12 oldala lehet.
Az ábrán egy megfelelő 12 oldalú sokszöget láthatunk. Ez úgy keletkezett, hogy először két megfelelő egybevágó háromszöget egy téglalappá illesztettünk össze. Ezután a hosszabbik oldalak fölé harmad ekkora háromszögekből összerakott szimmetrikus trapézokat illesztettünk, és hasonlóképpen jártunk el a rövidebb oldalakat illetően is.

--

Mennyire lehet felbontani egy háromszöget? Milyen háromszöget lehet felbontani?

És négyszöget?

Szabó Magda, Szabadka

Létezik-e olyan teljes négyzetszám, amelynél a számjegyek összege 2011^{2010} ?

Megoldás:
Ha az x szám számjegyeinek száma 9n+1 akkor az x^3 számjegyinek összege is ilyen alakú szám és ennek négyzete is ilyen. 2011^3 =9k+1 azaz 2011^6 = 9N+1.
A 2011^{2010} =$(2011^6)^{335}$ = 9M+1 azaz $2011^{2010} \equiv 1(\mathrm{mod} 9)$

Ha az $x = 2\cdot 10^k - 1$ akkor $x^2 = (2\cdot 10^k - 1)^2 = 4\cdot 10^{2k} - 4\cdot 10^k + 1 =$
$= 400...0 - 400...0 + 1 = 399...9600...01$

Az x^2 számjegyeinek összege 3+6+1+(k-1)9= 9k+1 ahol k természetes szám tehát minden ilyen x számra teljesül.

II. Ha x =33...32 ahol k-1 számú 3-as van így az

$x^2 = 33...32^2 = (\frac{10^k - 4}{3})^2 = \frac{1}{9}(10^{2k} - 8\cdot 10^k + 16) = \frac{1}{9}(10^{2k} - 1) - 8\cdot\frac{1}{9}(10^k - 1) + 1$ amelynél a

$= 11...2 - 88...8 + 1 = 11...22...24$

számjegyek összege (k-1)1+(k-1)2+4=3k+1 minden k természetes számra $2011^{2010} \equiv 1(\mathrm{mod} 3)$.

--

Mennyi lehet a számjegyösszeg? 0, 1, 4, 7 (mod 9). Elő is áll?

Katz Sándor, Bonyhád

Egy egyetemista megírt már néhány tesztet, és az utolsó megírása előtt számolgat: Ha az utolsót 97 pontosra írom, akkor az átlagom 90 pont lesz, ha csak 73 pontra sikerül, akkor is 87 pont lesz az átlagom. Hány tesztet írt eddig az egyetemista?

Megoldás:
Ha eddig x tesztet írt, és az átlaga y pont volt, akkor az új, (x+1)-edik megírása után az átlaga

$\frac{xy + 97}{x + 1} = 90$ vagy $\frac{xy + 73}{x + 1} = 87$ lesz.

xy +97 = 90x + 90
xy +73 = 87x + 87
24= 3x +3
x = 7

Tehát eddig 7 tesztet írt az egyetemista és ezekből xy = 623 pontot szerzett. átlagosan 89-et. Ez megfelel a feltételeknek, mert (623+97)/8=90 és (623+73)/8=87

--

Ha 25-gyel kevesebb pont esetén az átlag 3-mal csökken, akkor 8 a dolgozatok száma, eddig tehát 7 dolgozat született.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Mennyi az $(5 + 3\text{tg}x)^2 + (5 - 3\text{ctg}x)^2$ legkisebb értéke, amikor $x \in R - \{k\pi \mid k \in Z\}$?.

Megoldás:
Vizsgáljuk az adott kifejezést.

$(5 + 3\text{tg}x)^2 + (5 - 3\text{ctg}x)^2 = 25 + 30\text{tg}x + 9\text{tg}^2 x + 25 - 30\text{ctg}x + 9\text{ctg}^2 x = 9(\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x) + 30(\text{tg}x -$

$\text{ctg}x) + 50 = 9(\text{tg}x - \text{ctg}x)^2 + 18 + 30(\text{tg}x - \text{ctg}x) + 50 = (3\text{tg}x - 3\text{ctg}x + 5)^2 + 43$.

A kifejezés legkisebb értéke 43 , és ezt el is éri, amikor $3\text{tg}x - 3\text{ctg}x + 5 = 0$, ahonnan $\text{tg}x =$

$\frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$ és ilyen x érték létezik is.

--

$$a = tgx \qquad \frac{1}{a} = ctgx$$

$$(5+3a)^2 + \left(5 - \frac{3}{a}\right)^2 = 9\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 30\left(a - \frac{1}{a}\right) + 50$$

$$b = a - \frac{1}{a} \qquad b^2 + 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$9(b^2+2) + 30b + 25 = 9b^2 + 30b + 68 = (3b+5)^2 + 43$$

Kántor Sándor, Debrecen

Lehet-e egy poliéder minden csúcsában különböző pozitív egész számot elhelyezni úgy, hogy két csúcsban elhelyezett szám pontosan akkor relatív prím, ha a csúcsokat él köti össze?

Megoldás:

Az elhelyezés lehetséges, ennek bizonyítását egy, a feltételeknek megfelelő elhelyezés megadásával végezzük.
Először tekintsük azokat a csúcspárokat, amelyeket nem köt össze él a poliéderben, és rendeljünk minden ilyen csúcspárhoz egy prímszámot, különböző csúcspárhoz különbözőt. A csúcspár mindkét csúcsába tegyük be (ez még nem az elhelyezés!) a csúcspárhoz rendelt prímszámot. Ezután a poléder minden csúcsába tegyünk egy prímszámot úgy, hogy ezek egymástól is és a korábban a csúcspárokhoz rendelt prímszámoktól is különbözők legyenek.
Minden csúcsnál az így betett prímszámok szorzata legyen az illető csúcsban elhelyezett szám. Ezek különbözők, mert a második betételnél használt prímszámban biztosan különböznek. A csúcspároknál is különböző prímszámokat használtunk, ezért az éllel összekötött csúcsokban elhelyezett számok

relatív prímek. Ha két csúcsot nem köt össze él, akkor ehhez a csúcspárhoz rendelt prímszám közös tényezője a két csúcsban elhelyezett számnak.
Tehát ez az elhelyezés kielégíti a feltételeket.

Szabó Magda, Szabadka

Van-e olyan 4020 természetes számot tartalmazó B halmaz, amelynek minden 2011 elemet tartalmazó részhalmazában az elemek összege nem osztható 2011-gyel!

Megoldás:
A C halmaznak elemei 2010 különböző természetes szám, amelyek oszthatók 2011-gyel pl. {2011 k, ahol a k=1,2,…2010}.
A D halmaznak elemei 2010 különböző természetes szám, amelyeknek 2011-es maradéka 1 pl. {2011 k+1, ahol a k=1,2,…2010}.
Legyen a C és D metszete a D halamaz és ennek valamely 2011 elemű részhalmaza A.
Legyen a A és D metszetének k eleme, ahol a k=1,2,…2010, akkor az A és C metszetének 2011-k eleme van. Ezért az A elemeinek összege 2011-es maradéka
(2011-k) 0 + k 1 = k tehát nem osztható 2011-gyel, mert a k=1,2,…2010

Kántor Sándor, Debrecen

Legyenek *m* és *n* olyan pozitív egész számok, amelyek relatív prímek, és $1 < m < n$ is teljesül. Bizonyítsa be, hogy $\frac{m}{n}$ előállítható (véges sok) különböző törzstört összegeként! (A törzstört olyan törtszám, amelynek számlálója 1, nevezője 1-nél nagyobb természetes szám.)

Megoldás:
A bizonyítás indirekt. Ha lennének törzstörtek összegeként nem előállítható, a feladatban leírt alakú törtek, akkor ezek között a $\frac{m_0}{n_0}$ tört legyen olyan, amelynél kisebb számlálójú nincs közöttük. Legyen *x* olyan természetes szám, amelyre teljesül, hogy $m_0 x > n_0 > m_0(x-1)$. Ilyen nyilnván van (szigorú egyenlőtlenséggel is), mert a számláló és a nevező relatív prím. Így $\frac{m_0}{n_0} - \frac{1}{x} = \frac{m_0 x - n_0}{x n_0} = \frac{m_1}{x n_0}$

Mivel $m_1 = m_0 x - n_0 = m_0$ ezért $\frac{,m_1}{x n_0}$ felírható törzstörtek összegeként, de akkor $\frac{m_0}{n_0}$ is felírható, és ez ellentmondás.

Kántor Sándor, Debrecen

Legyen $a_n \left(n \in N^+\right)$ a $\sqrt{n}$ -hez legközelebbi egész szám. (Ha *n* négyzetszám, akkor $a_n = \sqrt{n}$.)
Mennyi az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2011}}$ összeg értéke?

Megoldás:

Legyenek k és n olyan pozitív egész számok, amelyekre $\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$ és $n < 2011$, így $k^2 - k < n < k^2 + k$. Tehát az $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{2011}}$ összegben $\frac{1}{k}$ értéke $\left(k^2 + k\right) - \left(k^2 - k\right) = 2k$ -szor fordul elő, és ezek összege $2k \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Mivel $2011 = 44^2 + 44 + 31$ ezért a keresett összeg $44 \cdot 2 + 31 \cdot \frac{1}{45} = 88 \frac{31}{45}$.