

I. rész

1. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\log_{2^{x+1}}(2^{x+1} + 5) = 2$$

6 pont

b) A LOTTÓ (90 számból 5 húzása) megváltoztatására készülnek. Két javaslat van. Az egyik 90-ből 4 szám húzását javasolva a régi módon, a másik meg 45 számból 4 húzását javasolja a sorrend figyelembe vételével, de ez lehetővé tenné, hogy ugyanazt a számot többször is ki lehessen húzni, azaz a már húzott számot ismét visszatennék. Azt akarnák elfogadni, amelyik játék esetében kevesebb az esély a telitalálatra. Zsebszámológép nélkül (!) határozzuk meg, hogy melyiket válasszák!

6 pont

2. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter:

$$3x + 2p = 5\sqrt{px}$$

7 pont

b) Egy négyszögnek, mely egyidejűleg érintő és húrnégyszög is, az egyik oldala 5 cm és valamelyik oldaltól kezdve pozitív körbejárás szerint véve az oldalakat mértani sorozat elemeit kapjuk. Mekkora a másik három oldal és milyen négyszögről van szó?

6 pont

3. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - 1 = 1 - \frac{y}{x} \\ x^8 + 2y^6 = x^6 + 2y^8 \end{cases}$$

6 pont

b) Adjuk meg az összes p pozitív prímszámot, melyre a $4x^2 - 4(2p+1)x + (4p^2 - p) = 0$ egyenlet gyökeinek különbsége egész szám!

7 pont

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

7 pont

b) Mekkora területet zárnak be az $y = x$ egyenes és a $y = x^3 - 9x^2 + 9x$ görbe?

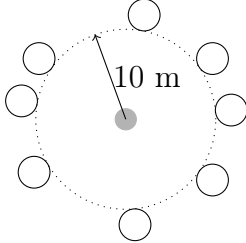
6 pont

II. rész

5. Az $y = x^3 - 6x^2 + 15x + c$ függvény egyik érintőjének egyenlete $y = 6x - 5$. Mekkora a c értéke?

16 pont

6. A rajz szerint egy 10 m sugarú kör közepén állunk puskával a kézben, amit 8 darab, 1 m sugarú tölgyfa vesz körbe nem egyenletesen elhelyezkedve (a rajz nem a valós elhelyezkedést mutatja). Véletlenszerűen 5 lövést leadva mekkora annak a valószínűsége, hogy legalább 3 lövés kijut a "fa ketrecből"?



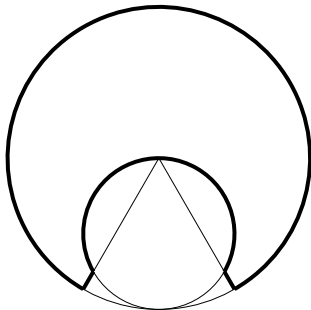
16 pont

7. Kugli játékhhoz könnyen boruló bábút terveztünk. A rajz a keresztmetszeti képét ábrázolja. Vesszünk egy $R = 30$ cm sugarú gömböt, amiből kivágunk egy a gömb középpontjából induló kúpot úgy, hogy a gömb felületén egy 225π cm² felületdarabot vágunk ki. Ezután egy $r = 5$ cm sugarú gömböt teszünk a csúcsra úgy, hogy a kis gömb középpontja pont a csúcsra illeszkedjék (persze, előtte a szükséges lyukat kivágjuk). Mekkora az így kapott test térfogata?



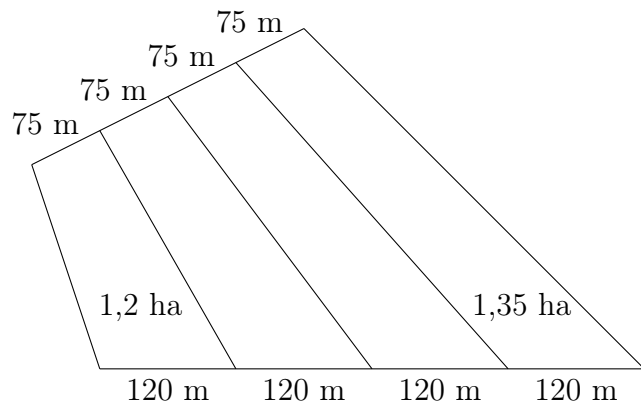
16 pont

8. Egy nyakláncra medált terveztünk, melyet a rajz mutat, ahol a medált a vastag vonalak határolják. A nagy kör sugara $R = 4$ cm, a kicsi kör belülről érinti a nagy kört és sugara $r = 2$ cm, amit kivágunk. Hogy ne legyen hegyes a medál, ezért a nagy kör középpontjából szimmetrikusan 60° szög szögtartományában levő részeket is levágjuk. Mekkora a keletkezett medál kerülete, területe?



16 pont

9. Az ábra egy földterület rajzát adja, amelyen 4 tulajdonos osztozik. A nyilvántartásban a középső két terület nagysága olvashatatlan. Mekkora a hiányzó két terület nagysága?



16 pont