Feladatok: Szoldatics Józse, KÖMAL, 2019/2020

I. rész

1/a. ˜

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2+1}$$

1/b. ˜

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2y}{2x^2+y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{12x^2y}{4x^2+3y} = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

2/a. ˜

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlet

$$4^x + 4 \cdot 2^{-x} = 5$$

2/b. ˜

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlet

$$\sin^6 x + \cos^6 x = -2 + 3\cos 2x$$

3/a. ˜

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlet

$$1 + \frac{3}{\log_4(x^2-6x+13)} = \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2(x+1)^2}{2}$$

3/b. ˜

Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva 15 esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. E miatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt”, azaz a hatos megnövelt valószilűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden 60-as sorozat esetén 15 lett a kapott érték (azaz av árjató érték 15).

4/a. ˜

Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre 1-et adunk, akkor egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege 7. Mennyi a számtani sorozat 1010. eleme?

4/b. ˜

Adott a következő sorozat: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1$; $(n \geq 1)$. Adjuk meg a sorozat 2020. tagját!

II. rész

5/a. ˜

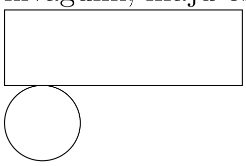
Legyen a és b nem negatív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$0 \leq \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} \leq 1$$

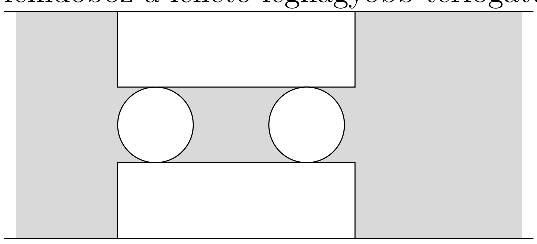
Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot?

5/b. ˜

Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az ábrán látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.



A kivágást egy 30 cm-es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy 2 ilyen mintát fordítunk egymással szembe az űbra szerint. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen?

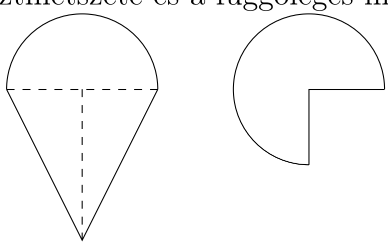


6/a. ˜

Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érintik az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat!

6/b. ˜

A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágósík az embléma függőleges tengelye mentén metszik egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete itt látható:



A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5m magasságúra tervezett emblémát. Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% veszteséggel számolhatunk? Mekkora lesz az elkészült embléma tömege? Hány m^2-re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni. A festés során keletkező veszteség 5%.

7/a. ˜

18 tudós e-mail segítségével tartják a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven leveleznek, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik három, aki egymás között németet használ.

7/b. ˜

Aladár négyjegyű számokat ír egymás mellé, melyek csak az 1; 2; 3 és 4 jegyeket tartalmazzák. Balról kezdve írja le a jegyeket. Figyel arra, hogy 1-es után csak 4-es; páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hány féle számot tud leírni így?

8/a. ˜

Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán!

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257$$

ahol a zárójeles kifejezések a két szám LNKO-ját és LKKT-jét jelölik.

8/b. ˜

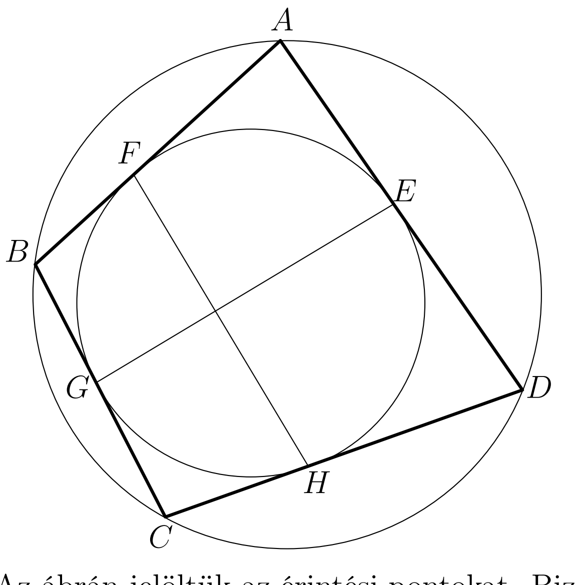
Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 2 és 14; szárai 10. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek e négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara?

9/a. ˜

Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$; ahol $n \in \mathbb{N}^+$

9/b. ˜

Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyszög is.



Az ábrán jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy EG és FH szakaszok merőlegesek.