

Függvényegyenletek

A feladatmegoldó szemináriumon megbeszélésre kerül a manapság versenyeken egyre többször előforduló egészrész és törtrész egyenletek megoldási módszerei, ötletei.

Az előadáson a következő feladatok megoldására kerül sor (többek között):

- $2f(x) + 3f(x - 1) = 4x - 1$ (polinom!)
- $f(x) - f(-x) = x^2$
- $f(1 - x) + 2f(1 + x) = x + 3$
- $f(x^2 + x + 1) + 2f(x^2 - x + 1) = 3x^2 - x + 6$
- $xf\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2f(x) = x - 1, \quad x \neq 0$
- $f(x) + kx^2 f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1}, \quad x \neq 0; 1 < k \leq 1$
- $(1 - x)f(x) + 2xf(1 - x) = -3x^2 + 4x + 1$
- $f(x+1) \leq x \leq f(x) + 1$
- $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$
- $xf(y) + yf(x) = (x^2 + y^2)f(x)f(y)$

A feladatok lehetséges megoldási módjai közül nézzünk egyet:

Oldjuk meg a következő függvényegyenleteket a valós számok lehető legbővebb részhalmazán!

$$f(x) + kx^2 f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1} \quad x \neq 0; -1 \quad 0 < k^2 < 1$$

Megoldás

Legyen $x = a$ és $x = \frac{1}{a}$ helyettesítések, ahol $a \neq 0; -1$:

$$\begin{cases} f(a) + ka^2 f\left(\frac{a}{a+1}\right) = \frac{a}{a+1} \\ f\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{k}{a^2} f(a) = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+1} = \frac{1}{a+1} \end{cases}$$

Az első egyenlet vonjuk ki a második egyenlet ka^2 -szeresét kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (1 - k^2)f(a) &= \frac{a}{a+1} - \frac{ka^2}{a+1} = \frac{a(1 - ka)}{a+1} \\ f(a) &= \frac{a(1 - ka)}{(a+1)(1 - k^2)} \\ f(x) &= \frac{x(1 - kx)}{(x+1)(1 - k^2)} \end{aligned}$$

Ellenőrzés

$$\begin{aligned} f(x) + kx^2 f\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \frac{x(1 - kx)}{(x+1)(1 - k^2)} + kx^2 \frac{\frac{1}{x} - k \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \\ &= \frac{x(1 - kx)}{(x+1)(1 - k^2)} + kx^2 \frac{(x - k)}{x(1+x)(1 - k^2)} = \frac{x(1 - kx)}{(x+1)(1 - k^2)} + kx \frac{(x - k)}{(1+x)(1 - k^2)} = \\ &= \frac{x(1 - kx) + kx(x - k)}{(x+1)(1 - k^2)} = \frac{x - kx^2 + kx^2 - k^2x}{(x+1)(1 - k^2)} = \frac{x(1 - k^2)}{(x+1)(1 - k^2)} = \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

Szoldatics József
Szilágyi Erzsébet Gimnázium
Budapest