Lánctörtek

Szoldatics József
Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

1. Lánctörtek történet

Már nagyon régóta ismeretes, hogy a valós számok közelíthetők lánctörtekkel. Felhasználják a naptárkészítésben, szökőévek kiszámításában, fontos konstansok közelítésére, és számok irracionális voltának bizonyítására.

Először Pietro Cataldi 1613-ban kiadott könyvében jelentek meg lánctörtek, de szó esik róluk Daniel Schwenter könyvében, a "Deliciae Physic-Mathematicae"-ban (1636) is. 1655-től John Wallis több művében is foglalkozott velük. Christiaan Huygens nagy nevezőjű törteket és természeti konstansokat közelített velük: így számította ki naprendszer- modelljéhez a fogaskerekek áttételét.

Leonhard Euler levelezésében először a Riccatidi erenciálegyenletekkel kapcsolatban jelentek meg a lánctörtek. Hamarosan azonban már maguk a lánctörtek kezdték érdekelni, és megalapozta a lánctörtek elméletét. Belátta, hogy a valós számok lánctörtbe fejthetők az euklidészi algoritmus általánosításával; hogy a racionális számok lánctörtes alakja véges; hogy a végtelen periodikus lánctörtek másodfokú racionális együtthatós egyenletek megoldásai; és hogy a lánctörtes közelítés valamilyen értelemben a legjobb.

(Idézet a 3. forrás 4. oldaláról)

2. Lánctörtek elméletéből...

1. Definíció. *Egy általános lánctört egy olyan kifejezés, aminek alakja*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cdots}}}}$$

Nem tört alakú leírása:

$$a_0 + \frac{b_1|}{|a_1} + \frac{b_2|}{|a_2} + \frac{b_3|}{|a_3} + \frac{b_4|}{|a_4} + \dots$$

2. Definíció. *Egy általános lánctört egyszerű (vagy reguláris), ha* $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 1$ *és* $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{N}^+$ *azaz alakja*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

Nem tört alakú leírása:

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

3. Definíció. *Véges a lánctört, ha véges sok tört alkotja.*

1. Tétel. *Véges reguláris lánctört értéke racionális szám.*

Bizonyítás: A lánctört legalsó szintjén levő egészet és törtet közös nevezőre hozva, így eggyel kevesebb lesz a szintek száma. Ezt a lépést ismételve eljutunk oda, hogy a végén csak egy tört kifejezésünk marad, ez a tört a véges lánctört értéke. Minden lépésben egész számokkal dolgoztunk (külön a számlálóra és a nevezőre is igaz), így a végén egy racionális számot kapunk. □

2. Tétel. *Minden racionális szám alakja véges reguláris lánctört.*

Bizonyítás: Tekintsük a lánctörtté alakítás folyamatát. Egy adott szint elérésekor a kapott tört legyen $\frac{p}{q}$, ahol $p < q$. Ekkor a következő lépés:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{a_i + \frac{q^*}{p}}$$

ahol $q^* < p$. Tehát egy olyan törtet kapunk, aminek a számlálója kisebb, mint az előzőtört számlálója volt. Azaz kapunk törtek egy olyan sorozatát, ahol a számláló egész szám és rendre csökken. Mivel az egész számok alulról korlátosak, ezért véges sok lépés után el fogjuk érni azt az állapotot, amikor a maradó tört számlálója 1, tehát leáll az eljárás, véges lánctörtet kapunk. □

Tekintsük a következő átalakítást:

$$\frac{67}{51} = 1 + \frac{16}{51} = 1 + \frac{1}{\frac{51}{16}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{16}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{16}{3}}} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}$$

Nézzük a következő Euklideszi-algoritmust

$67 \quad : 53 = 1$	$53 \quad : 16 = 3$	$16 \quad : 3 = 5$	$3 \quad : 1 = 3$
16	3	1	0

Összevetve a hányadosokat $1; 3; 5; 3$, amelyek megegyzenek a tört átalakítással.

3. Nevezetes lánctörtek

3.1. π lánctört alakjai

A π egyszerű lánctört alakja nem "szép", azaz nem ismétlődő, nincs benne valamilyen logikai szépség. Álljon itt először is ez.

$$\pi = [\,3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots\,] =$$

$$= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}}}}$$

Viszont léteznek π-nek "szép" lánctört alakjaI, álljon itt pár példa:

$$\pi = 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}} = 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cdots}}}}}$$

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cdots}}}}} \qquad \pi = 2 + \cfrac{2}{1/1 + \cfrac{1}{1/2 + \cfrac{1}{1/3 + \cfrac{1}{1/4 + \cdots}}}}$$

$$\pi = 2 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{2 \cdot 3}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cdots}}}} = 2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{1 \cdot 3}{4 + \cfrac{3 \cdot 5}{4 + \cfrac{5 \cdot 7}{4 + \cdots}}}}$$

3.2. e lánctört alakjai

$e = [\,2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, \dots, 1, 2k, 1, \dots\,]$

$e^2 = [\,7; 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, 42, 11, 1, 1, 12, 54, 14, 1, 1 \dots, 3k, 12k+6, 3k+2, 1, 1 \dots]$

$e^{\frac{1}{n}} = [\,1; n-1, 1, 1, 3n-1, 1, 1, 5n-1, 1, 1, 7n-1, 1, 1, 1, \dots\,] \qquad n \geq 2$

$e^{\frac{2}{n}} = \left[1; \frac{n-1}{2}, 6n, \frac{5n-1}{2}, 1, 1, \frac{7n-1}{2}, 18n, \frac{11n-1}{2}, 1, 1, \frac{13n-1}{2}, 30n, \frac{17n-1}{2}, 1, 1, \dots\right] \qquad n = \text{páratlan}$

$$(e-1)^{-1} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cdots}}}}$$

$$(\sqrt{e}-1)^{-1} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 + \cdots}}}}$$

4. Feladatok

4.1. Készítsük el a véges (végtelen?) lánctört...

Készítsük el a véges (végtelen?) lánctört alakját a következő számoknak:

$$a.)\ \frac{7}{3};\quad b.)\ \frac{17}{7};\quad c.)\ \frac{121}{13};\quad d.)\ \sqrt{2};\quad e.)\ \sqrt{3};\quad f.)\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

4.2. Adjuk meg a következő számokat a "szokásos"...

Adjuk meg a következő számokat a "szokásos" módon:

$a.)\ [1;\ 1;\ 2\,] =$ $\qquad b.)\ [1;\ 1;\ 1;\ 2\,] =$ $\qquad c.)\ [1;\ 2;\ 3;\ 4\,] =$ $\qquad d.)\ \left[1;\ \overline{1;\ 2}\,\right] =$ $\qquad e.)\ \left[1;\ \overline{2;\ 1}\,\right] =$

4.3. Számítsuk ki a pontos...

5. Megoldások

5.1. Készítsük el a véges (végtelen?) lánctört...

Készítsük el a véges (végtelen?) lánctört alakját a következő számoknak:

$$a.)\ \frac{7}{3};\quad b.)\ \frac{17}{7};\quad c.)\ \frac{121}{13};\quad d.)\ \sqrt{2};\quad e.)\ \sqrt{3};\quad f.)\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Megoldás

a.) $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad [2;\, 3]$

b.) $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{3}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad [2;\, 2;\, 3]$

c.) $\frac{121}{13} = 9 + \frac{4}{13} = 9 + \frac{1}{\frac{13}{4}} = 9 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}} \qquad \Rightarrow \qquad [9;\, 3;\, 4]$

d.) $\sqrt{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{1} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{2}}}} \qquad \Rightarrow \qquad \left[1;\, \overline{2}\right]$

e.) $\sqrt{3} = 1 + \frac{\sqrt{3}-1}{1} = 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{3}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}} =$

$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}}}} = \qquad \Rightarrow \qquad \left[1;\, \overline{1;\, 2}\right]$

f.) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0 + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{5}+1}{2}} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{\sqrt{5}-1}{2}} = \qquad \Rightarrow \qquad \left[0;\, \overline{1}\right]$

5.2. Adjuk meg a következő számokat a "szokásos"...

Adjuk meg a következő számokat a "szokásos" módon:

a.) $[1;\, 1;\, 2] =$ *b.)* $[1;\, 1;\, 1;\, 2] =$ *c.)* $[1;\, 2;\, 3;\, 4] =$ *d.)* $\left[1;\, \overline{1;\, 2}\right] =$ *e.)* $\left[1;\, \overline{2;\, 1}\right] =$

Megoldás

a.) $[1;\, 1;\, 2] \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

b.) $[1;\, 1;\, 1;\, 2] \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

A számolás közben felhasználtuk az előző feladat végeredményét.

c.) $[1;\,2;\,3;\,4\,]$ $\Rightarrow$ $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}=1+\frac{13}{30}=\frac{43}{30}$

d.) $\left[1;\,\overline{1;\,2}\,\right]$ $\Rightarrow$ $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}=1+\frac{x+1}{x+2}=\frac{2x+3}{x+2}$

Megoldva a kapott egyenletet ($x>0$):

$$\begin{aligned} x &= \frac{2x+3}{x+2} \\ x^2+2x &= 2x+3 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

e.) $\left[1;\,\overline{2;\,1}\,\right]$ $\Rightarrow$ $x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}=1+\frac{x}{2x+1}=\frac{3x+1}{2x+1}$

Megoldva a kapott egyenletet ($x>0$):

$$\begin{aligned} x &= \frac{3x+1}{2x+1} \\ 2x^2+x &= 3x+1 \\ 2x^2-2x-1 &= 0 \\ x &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

5.3. Számítsuk ki a pontos...

Megoldás
A keresett...

6. Források

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction
2. http://mathworld.wolfram.com/ContinuedFraction.html
3. https://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mat/2013/dolecsek_mate.pdf

Tartalomjegyzék