„Vegyük észre…” feladatok megoldása „észrevétlenül”

Az 50. Rátz László Vándorgyűlésen (Kecskemét) dr. Csorba Ferenc (Győr) nagyon élvezetes előadást tartott a Kvant feladataiból. Az előadására főképpen algebrai feladatokat válogatott. Ott az egyik feladat kapcsán háromszor is elhangzott a „vegyük észre…” kezdetű mondat. Elmondása szerint ennek a feladatnak a Kvant-ban sem jelent meg más megoldása.

Az említett feladat egy sorozat n-edik elemének zárt alakban való megadása volt. A vándorgyűlésem megbeszélt sorozatok a következők (az eredeti sorozatok képzési szabályát kicsit megváltoztattam a magyar jelöléseknek megfelelően, de ez a változtatás nem érinti a lényeget):

1. feladat $a_n = \frac{n-1}{n}\left(a_{n-1}+1\right) \quad n \geq 2 \quad$ és $\quad a_1 = 0$

2. feladat $a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}\left(a_{n-1}+1\right) \quad n \geq 2 \quad$ és $\quad a_1 = 0$

3. feladat $a_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+4)(n+3)(n+2)}\left(a_{n-1}+1\right) \quad n \geq 2 \quad$ és $\quad a_1 = 0$

Mindhárom esetben a megoldás menete az elemek kiszámolása volt egy darabig, majd a „vegyük észre, hogy ezek az elemek teljesítik a következő összefüggést…” és végül teljes indukciós befejezés következett. Minden feladatot elkezdünk most is így megoldani, majd befejezzük más módon.

1. feladat megoldása
Számítsuk ki sorban az elemeket:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1+1\right) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\left(a_2+1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1 = \frac{2}{2}$$

$$a_4 = \frac{3}{4}\left(a_3+1\right) = \frac{3}{4}(1+1) = \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{3}{2}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{n-1}{2}$$

Ez az összefüggés még megsejthető, de most oldjuk meg sejtések nélkül!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{n-1}{n}\left(a_{n-1}+1\right)$$

$$na_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$
\begin{aligned}
na_n &= (n-1)a_{n-1} + (n-1)\\
(n-1)a_{n-1} &= (n-2)a_{n-2} + (n-2)\\
(n-2)a_{n-2} &= (n-3)a_{n-3} + (n-3)\\
&\;\;....\\
3a_3 &= 2a_2 + 2\\
2a_2 &= a_1 + 1
\end{aligned}
$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 = (n-1)a_{n-1} + \ldots 2a_2 + a_1 + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$$

$$na_n = a_1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]$$

azaz

$$na_n = a_1 + [1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)] = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

mivel a sorozat első eleme $a_1 = 0$, ezért

$$na_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n = \frac{n-1}{2}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

2. feladat megoldása

Számítsuk ki sorban az elemeket:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 3}(a_1 + 1) = \frac{2}{12}(0+1) = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 4}(a_2 + 1) = \frac{6}{20}\left(\frac{1}{6} + 1\right) = \frac{6}{20} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{20}$$

$$a_4 = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}(a_3 + 1) = \frac{12}{30}\left(\frac{7}{20} + 1\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{27}{20} = \frac{27}{50}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$$

Itt már vannak kételyeim azzal kapcsolatban, hogy hogyan lehet ezt észrevenni. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+1)}(a_{n-1} + 1)$$

$$(n+2)(n+1)a_n = n(n-1)a_{n-1} + n(n-1)$$

Szorozzuk végig mind a két oldalt $(n+1)n$ -nel, ami nyilván nem nulla. Azért ezt a kifejezést választottuk, hogy a rekurziós összefüggésünkben az index léptetése után egyforma együtthatók jöjjenek létre a két oldalon.

$$(n+2)(n+1)^2 na_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^2(n^2-1)$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$(n+2)(n+1)^2 n a_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^4 - n^2$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n+2)(n+1)^2 n a_n = (n+1)n^2(n-1)a_{n-1} + n^4 - n^2$$

$$(n+1)n^2(n-1)a_{n-1} = n(n-1)^2(n-2)a_{n-2} + (n-1)^4 - (n-1)^2$$

$$n(n-1)^2(n-2)a_{n-2} = (n-1)(n-2)^2(n-3)a_{n-3} + (n-2)^4 - (n-2)^2$$

$$.....$$

$$5 \cdot 4^2 \cdot 3 a_3 = 4 \cdot 3^2 \cdot 2 a_2 + 3^4 - 3^2$$

$$4 \cdot 3^2 \cdot 2 a_2 = 3 \cdot 2^2 \cdot 1 a_1 + 2^4 - 2^2$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n+2)(n+1)^2 n a_n = 12a_1 + \sum_{i=2}^{n} i^4 - \sum_{i=2}^{n} i^2 = 12a_1 + \sum_{i=1}^{n} i^4 - \sum_{i=1}^{n} i^2$$

azaz

$$(n+2)(n+1)^2 n a_n = 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[\frac{3n^2+3n-1}{5} - 1\right] = 12a_1 + \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-6\right)}{30} =$$

$$= 12a_1 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(2n+1)}{10}$$

mivel a sorozat első eleme $a_1 = 0$, ezért

$$(n+2)(n+1)^2 n a_n = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(2n+1)}{10}$$

$$a_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

3. feladat megoldása

Számítsuk ki sorban az elemeket:

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4}(a_1+1) = \frac{1}{20}(0+1) = \frac{1}{20}$$

$$a_3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5}(a_2+1) = \frac{4}{35}\left(\frac{1}{20}+1\right) = \frac{4}{35} \cdot \frac{21}{20} = \frac{3}{25}$$

$$a_4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6}(a_3+1) = \frac{5}{28}\left(\frac{3}{25}+1\right) = \frac{5}{28} \cdot \frac{28}{25} = \frac{1}{5}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{(n-1)n}{10(n+2)}$$

Itt is vannak kételyeim azzal kapcsolatban, hogy hogyan lehet ezt észrevenni. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+4)(n+3)(n+2)}(a_{n-1}+1)$$
$$(n+4)(n+3)(n+2)a_n = (n+1)n(n-1)a_{n-1} + (n+1)n(n-1)$$

Szorozzuk végig mind a két oldalt $(n+3)(n+2)^2(n+1)^2 n$ -nel, ami nyilván nem nulla. Azért ezt a kifejezést választottuk, hogy a rekurziós összefüggésünkben az index léptetése után egyforma együtthatók jöjjenek létre a két oldalon

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n =$$
$$= (n+3)(n+2)^2(n+1)^3 n^2(n-1)a_{n-1} + (n+3)(n+2)^2(n+1)^3 n^2(n-1)$$

A jobb oldal második tagját kifejtve

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n =$$
$$= (n+3)(n+2)^2(n+1)^3 n^2(n-1)a_{n-1} +$$
$$+n^9 + 9n^8 + 30n^7 + 42n^6 + 9n^5 - 39n^4 - 40n^3 - 12n^2$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n =$$
$$= (n+3)(n+2)^2(n+1)^3 n^2(n-1)a_{n-1} +$$
$$+n^9 + 9n^8 + 30n^7 + 42n^6 + 9n^5 - 39n^4 - 40n^3 - 12n^2$$
$$(n+3)(n+2)^2(n+1)^3 n^2(n-1)a_{n-1} =$$
$$= (n+2)(n+1)^2 n^3(n-1)^2(n-2)a_{n-2} +$$
$$+(n-1)^9 + 9(n-1)^8 + 30(n-1)^7 + 42(n-1)^6 + 9(n-1)^5 - 39(n-1)^4 - 40(n-1)^3 - 12(n-1)^2$$

.....

$$7\cdot 6^2\cdot 5^3\cdot 4^2\cdot 3a_3 = 6\cdot 5^2\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2a_2 + 3^9 + 9\cdot 3^8 + 30\cdot 3^7 + 42\cdot 3^6 + 9\cdot 3^5 - 39\cdot 3^4 - 40\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2$$
$$6\cdot 5^2\cdot 4^3\cdot 3^2\cdot 2a_2 = 5\cdot 4^2\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 1a_1 + 2^9 + 9\cdot 2^8 + 30\cdot 2^7 + 42\cdot 2^6 + 9\cdot 2^5 - 39\cdot 2^4 - 40\cdot 2^3 - 12\cdot 2^2$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n = 8640a_1 +$$
$$\sum_{i=2}^{n} i^9 + 9\sum_{i=2}^{n} i^8 + 30\sum_{i=2}^{n} i^7 + 42\sum_{i=2}^{n} i^6 + 9\sum_{i=2}^{n} i^5 - 39\sum_{i=2}^{n} i^4 - 40\sum_{i=2}^{n} i^3 - 12\sum_{i=2}^{n} i^2$$

A részletekkel nem untatva az olvasót kapjuk, hogy:

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n = 8640a_1 + \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{10}$$

mivel a sorozat első eleme $a_1 = 0$, ezért

$$(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n a_n = \frac{(n-1)n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2(n+4)}{10}$$
$$(n+2)a_n = \frac{(n-1)n}{10}$$
$$a_n = \frac{(n-1)n}{10(n+2)}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

A nyár folyamán ismét kezembe került Dr. Lajkó Károly a 49. Rátz László Vándorgyűlésen (Debrecen) elhangzott előadásán készített jegyzetem és ott is láttam hasonló feladatok megoldását. A feladat a debreceni egyetemen kiadott jegyzetben is megtalálható. Ebből a jegyzetből származnak a következő feladatok, melyek közül a 49. RLV-n is elhangzott a 4. feladat és itt is így oldották meg a feladatokat:

4. feladat $a_n + a_{n-1} = (n-1)^2$ és $a_{20} = 94$

5. feladat $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1}$ $n \geq 2$ $a_1 = A$

6. feladat $a_n = 1 - \frac{n-1}{n} a_{n-1}$ $n \geq 2$ $a_1 = 1$

7. feladat $a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1} a_{n-2}$ $n \geq 3$ $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}$

4. feladat megoldása

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_2 + a_1 = 1^2 \Rightarrow a_2 = 1 - a_1$$

$$a_3 + a_2 = 2^2 \Rightarrow a_3 = 4 - a_2 = 4 - (1 - a_1) = 3 + a_1$$

$$a_4 + a_3 = 3^2 \Rightarrow a_4 = 9 - a_3 = 9 - (3 + a_1) = 6 - a_1$$

$$a_5 + a_4 = 4^2 \Rightarrow a_5 = 16 - a_4 = 16 - (6 - a_1) = 10 + a_1$$

Vegyük észre, hogy az elemek megadásakor megjelenő számok „szépek”, azaz

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

Sejtés, hogy a sorozat n. elemét ki lehet számítani a következő módon:

$$a_n = (-1)^{n+1} a_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = (-1)^{n+1} a_1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

Ez az összefüggés még megsejthető, de most oldjuk meg sejtések nélkül!

Írjuk fel a sorozat képzési szabályát egymás után következő két elemre:

$$a_n + a_{n-1} = (n-1)^2 \qquad n \geq 3$$

$$a_{n-1} + a_{n-2} = (n-2)^2$$

Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat és rendezzük

$$a_n - a_{n-2} = (n-1)^2 - (n-2)^2 = 2n - 3$$

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-2) + 1$$

Írjuk fel ezt az összefüggést egymás után kettesével következő elemekre:

$$a_n = a_{n-2} + 2(n-2) + 1$$
$$a_{n-2} = a_{n-4} + 2(n-4) + 1$$
$$a_{n-4} = a_{n-6} + 2(n-6) + 1$$
$$....$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$a_n = a_x + 2[(n-2) + (n-4) + (n-6) + ...] + (1+1+1+....)$$

ahol ***x*** értéke 1 vagy 2 aszerint, hogy n páros vagy páratlan szám-e.

Legyen $n = 2k$ alakú, ekkor

$$a_n = a_{2k} = a_2 + 2[(2k-2) + (2k-4) + (2k-6) + ... + 2] + (1+1+1+....) =$$
$$= a_2 + 4[(k-1) + (k-2) + (k-3) + ... + 1] + (k-1) = a_2 + 4\frac{k(k-1)}{2} + (k-1) =$$
$$= a_2 + 2k(k-1) + (k-1) = 1 - a_1 + 2k^2 - 2k + k - 1 = -a_1 + 2k^2 - k =$$
$$= -a_1 + \frac{4k^2 - 2k}{2} = -a_1 + \frac{n^2 - n}{2} = -a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

Legyen $n = 2k+1$ alakú, ekkor

$$a_n = a_{2k+1} = a_1 + 2[(2k-1) + (2k-3) + (2k-5) + ... + 1] + (1+1+1+....) =$$
$$= a_1 + 4[k + (k-1) + ... + 1] - k = a_1 + 4\frac{k(k+1)}{2} - k =$$
$$= a_1 + 2k(k+1) - k = a_1 + 2k^2 + k = a_1 + \frac{4k^2 + 2k}{2} = a_1 + \frac{(2k+1)2k}{2} = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

Kaptuk tehát, hogy

$$a_n = \begin{cases} -a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} & n = 2k \\ a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

Összefoglalva a paritás szerint kapott végeredményeket

$$a_n = (-1)^{n+1} a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

Most már könnyen meg tudjuk határozni az első elemet, felhasználva a megadott adatot:

$$a_{20} = 94 = (-1)^{21} a_1 + \frac{20(20-1)}{2} = -a_1 + 190 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 96$$

Tehát a keresett sorozat

$$a_n = (-1)^{n+1} \cdot 96 + \frac{n(n-1)}{2}$$

5. feladat megoldása

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_2 = \left(1 - \frac{1}{1}\right)^2 A + \frac{1}{1} = 1$$ Ez a kezdőértéktől független érték!

$$a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_5 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{n}{2(n-1)} \qquad n \geq 2$$

Ez az összefüggés könnyen megsejthető. De oldjuk meg sejtés nélkül.

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^2 a_{n-1} + \frac{1}{n-1} \qquad n \geq 2$$

$$a_n = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^2} a_{n-1} + \frac{1}{n-1}$$

$$(n-1)^2 a_n = (n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)$$

Írjuk fel a sorozat előző elemeit is ezen a módon:

$$(n-1)^2 a_n = (n-2)^2 a_{n-1} + (n-1)$$

$$(n-2)^2 a_{n-1} = (n-3)^2 a_{n-2} + (n-2)$$

$$\ldots$$

$$2^2 a_3 = 1^2 a_2 + 2$$

$$1^2 a_2 = 0^2 a_1 + 1$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$(n-1)^2 a_n = 0^2 a_1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$$

$$(n-1)^2 a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n = \frac{n}{2(n-1)}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

6. feladat megoldása

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = 1 - \frac{2}{3}a_2 = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$
$$a_4 = 1 - \frac{3}{4}\cdot a_3 = 1 - \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$
$$a_5 = 1 - \frac{4}{5}\cdot a_4 = 1 - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2k \\ \frac{n+1}{2n}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Ez az összefüggés könnyen megsejthető. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = 1 - \frac{n-1}{n}a_{n-1} \qquad n \geq 2$$
$$na_n = n - (n-1)a_{n-1}$$
$$na_n + (n-1)a_{n-1} = n$$

Írjuk fel ezt az összefüggést egymás után következő 2 elemre:

$$na_n + (n-1)a_{n-1} = n$$
$$(n-1)a_{n-1} + (n-2)a_{n-2} = n-1$$

Majd vonjuk ki egymásból ezt a két sort

$$na_n - (n-2)a_{n-2} = 1$$
$$na_n = (n-2)a_{n-2} + 1$$

A kapott összefüggést írjuk fel minden második elemre

$$na_n = (n-2)a_{n-2} + 1$$
$$(n-2)a_{n-2} = (n-4)a_{n-4} + 1$$
$$\dots$$
$$(i+2)a_{i+2} = ia_i + 1 \qquad i \in \{1;2\}$$

Adjuk össze az egyenleteket. Vegyük figyelembe, hogy vannak megegyező tagok a két oldalon:

$$na_n = \begin{cases} 2a_2 + \frac{n-2}{2} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} & n = 2k \\ a_1 + \frac{n-3}{2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

azaz

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 2k \\ \frac{n+1}{2n} & n = 2k+1 \end{cases}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

7. feladat megoldása

$$a_n = -\frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}a_{n-2} \qquad n \geq 3 \qquad a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}$$

Számítsunk ki elemeket, használjuk a képzési szabályt:

$$a_3 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Kialakul az a sejtés, hogy

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Ez az összefüggés könnyen megsejthető. Oldjuk meg sejtések nélkül a feladatot!

Rendezzük át a sorozat képzési szabályát a következő módon:

$$a_n = -\frac{1}{n}a_{n-1} + \frac{n-2}{n-1}a_{n-2} \qquad / \cdot n(n-1) \neq 0$$

$$n(n-1)a_n = -(n-1)a_{n-1} + n(n-2)a_{n-2}$$

Vezessünk be egy új sorozatot a következő módon:

$$b_n = na_n$$

$$b_1 = 1\cdot a_1 = 1$$

$$b_2 = 2\cdot a_2 = 1$$

Ekkor erre a sorozatra

$$(n-1)[na_n] = -[(n-1)a_{n-1}] + n[(n-2)a_{n-2}]$$

$$(n-1)b_n = -b_{n-1} + nb_{n-2}$$

Alakítsuk most ezt egy kicsit:

$$(n-1)b_n = -b_{n-1} + nb_{n-2}$$

$$(n-1)b_n = (n-1)b_{n-1} - nb_{n-1} + nb_{n-2}$$

$$(n-1)b_n - (n-1)b_{n-1} = -nb_{n-1} + nb_{n-2}$$

$$(n-1)(b_n - b_{n-1}) = -n(b_{n-1} - b_{n-2})$$

Ha $b_{n-1} = b_{n-2}$, akkor az utolsó alakból következik, hogy

$$(n-1)(b_n - b_{n-1}) = -n(b_{n-1} - b_{n-2}) = 0$$

Azaz $b_n = b_{n-1}$ és innentől már a további elemekre $b_i = b_{n-1},\ \forall\ i > n-1,$.

Esetünkben a sorozat első két eleme megegyezik, ezért minden elem megegyezik az első elemmel, tehát

$$b_n = 1 = na_n$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

És ezt szerettük volna bizonyítani.

Összefoglalva

Az említett feladatok zárt alakja az elemek felírásával és kiszámításával hol könnyebben, hol nehezebben megsejthető, majd a teljes indukció felhasználásával megoldhatók. Arra szerettem volna példát mutatni, hogy lehet másképpen is, mert nem minden esetben jön az ötlet, hogy milyen számokat is látok az elemek kiszámítása után. Segíthet a sorozat átrendezése oly módon, hogy a rekurziós összefüggés azonos együtthatókat eredményezzen az index léptetése után, ami lehetővé teszi a tagok eltüntetését, majd a zárt összefüggés megtalálását.
Természetesen ez sem csodamódszer és helyenként borzalmas (helyenként brutális) algebrai átalakítások elvégzését teszi szükségessé, mint itt a 3. feladat kapcsán látható is volt, ahol 10-ed fokú kifejezést kell szorzattá alakítani. Ám lehet, hogy a végeredménynek a 3. feladatban kapott

$$a_n = \frac{(n-1)n}{10(n+2)}$$

kifejezés helyett az egyszerűsítés elvégzése nélkül kapott

$$a_n = \frac{n^{10}+15n^9+90n^8+270n^7+393n^6+135n^5-340n^4-420n^3-144n^2}{10(n+4)(n+3)^2(n+2)^3(n+1)^2 n}$$

kifejezés is elfogható végeredménynek?

A feladatok megoldása során használt összefüggések

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^2+3n^2+n}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} = \frac{2n^6+6n^5+5n^3-n^2}{12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42} = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} = \frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)}{90} = \frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)}{20} = \frac{2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$$

Feladatok forrásai:
Matematikatanárok 50. Rátz László Vándorgyűlése, Bolyai János Matematikai Társulat, 2010 kiadványban találhatók a következő feladatok, dr. Csorba Ferenc: Válogatás a Kvant feladataiból:

1. feladat: 6. oldal, 9/a feladat
2. feladat: 6. oldal, 9/b feladat
3. feladat: 6. oldal, 9/c feladat

A következő feladatok Dr. Lajkó Károly: Függvényegyenletek feladatokban DE Mat. Intézet Debrecen 2005 kiadványából származnak

4. feladat: 14. oldal, 1. feladat (AIME – 1994)
5. feladat: 15. oldal, 3. feladat
6. feladat: 16. oldal, 4. feladat
7. feladat: 18. oldal, 8. feladat

Szoldatics József
Dunakeszi
Radnóti Miklós Gimnázium