Szoldatics József: Úton-módon

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

A mai számban geometria feladatok gyűjteményét mutatnám meg, illetve mutatnék belőle feladatokat. A cikk címe „Pitagorasz gótikus ablakai”, szerzői Magyar Eszter (ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium) és Szoldatics József, azaz én vagyok. A továbbiak előtt idézném az előszóból:

„ A feladatok eredete a történelem ködébe vész el: egyszer csak előbukkant egy papírlap, ábrákkal, melyeken érintkező körök, körívek, szakaszok voltak és ki kellett számolni őket. A kezdeti gyűjtemény bővült az idők során, de nagyon rendezetlen volt.

A használat során praktikusnak tűnt a feladatlap, úgyhogy elhatároztuk, a feladatoknak adunk valami szép keretet, leírjuk a megoldásokat és a gyűjteményt is áttekinthetően. Reméltük, ha elkészítjük e tervünknek megfelelő anyagot, akkor más is jól fogja tudni használni.”

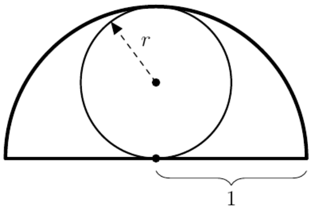
A feladatok eredetileg Pitagorasz tételének a felhasználásával lettek megoldva, de ahogyan haladtunk, adódtak más megoldások is (Descartes tétel, inverzió, ...). A feladatokat besoroltuk szubjektív módon, hogy hol, melyik psztályban lehet használni.

A gyűjtemény egy cikk formában megtalálható a matek.fazekas.hu honlapon....

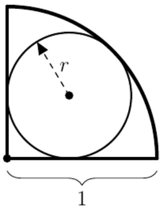
A feldolgozott feladatok

A cikk 37 feladatot és kb. 60 megoldást tartalmaz. A feladatok ábrái a következők.

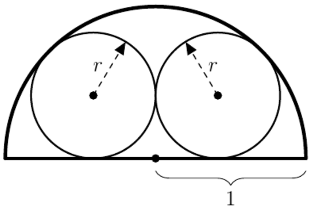
1.



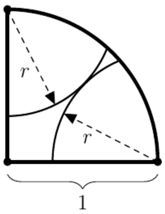
2.



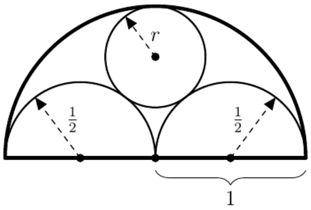
3.



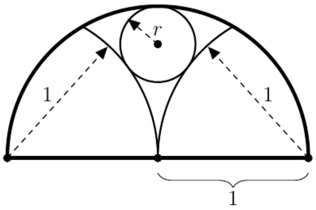
4.



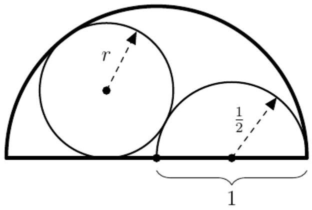
5.



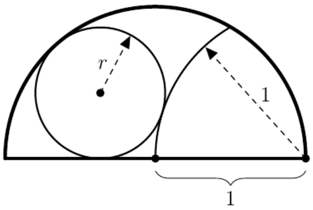
6.



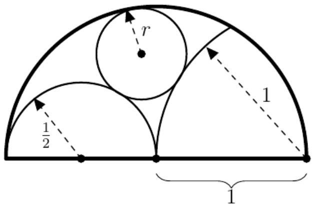
7.



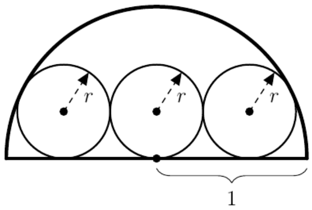
8.



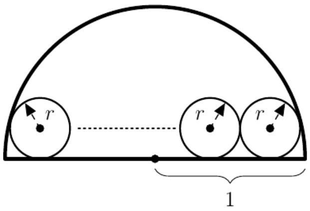
9.



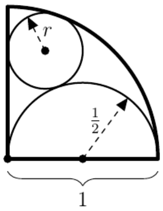
10.



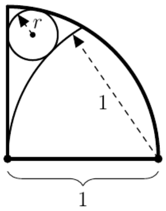
11.



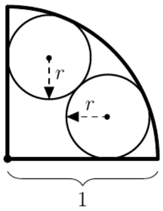
12.



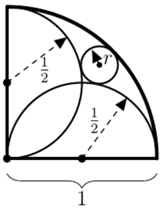
13.



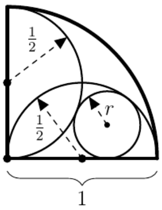
14.



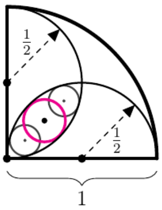
15.



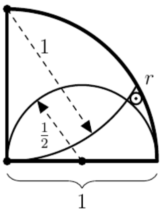
16.



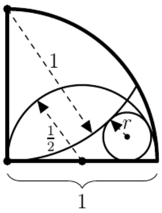
17.



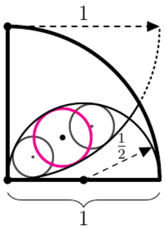
18.



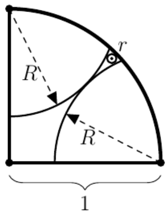
19.



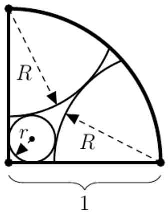
20.



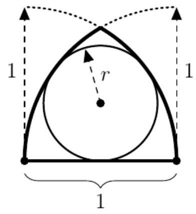
21.



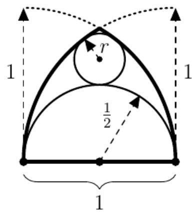
22.



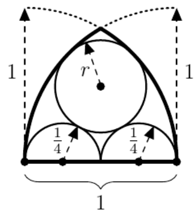
23.



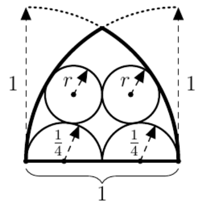
24.



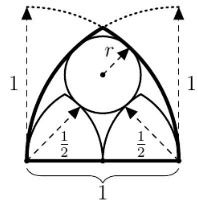
25.



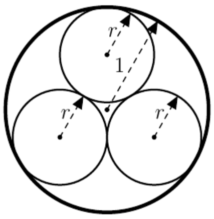
26.



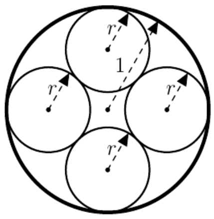
27.



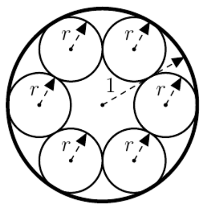
28.



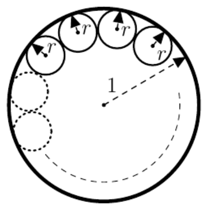
29.



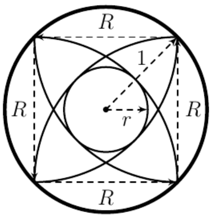
30.



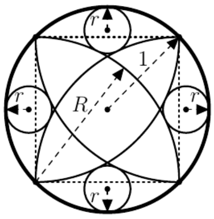
31.



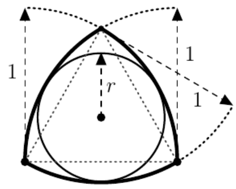
32.



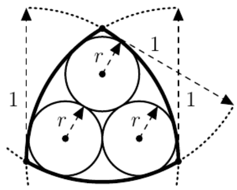
33.



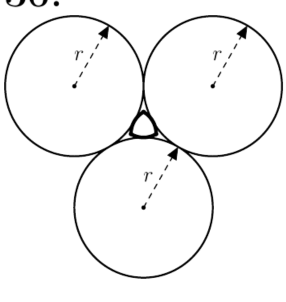
34.



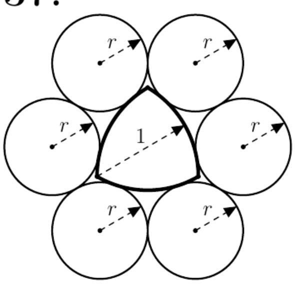
35.



36.

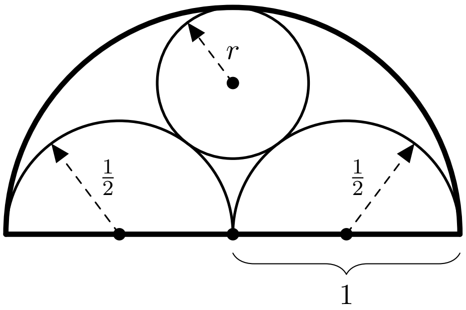


37.



Gyűjtemény 5. feladata

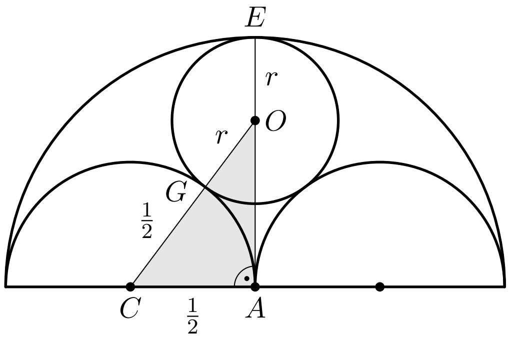
Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk két $\frac{1}{2}$ sugarú félkört az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



Megoldás

Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OG.$$

Összekötjük az O és C pontokat. Ez a szakasz átmegy a G ponton is.

Az AE szakasz merőleges a CA szakaszra a szimmetria miatt.

Mivel $CG = \frac{1}{2}$, ezért

$$OC = \frac{1}{2} + r,$$

és $AE = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Írjunk fel OCA háromszögben Pitagorasz-tételt, majd rendezzük!

$$\left(\frac{1}{2} + r\right)^2 = (1 - r)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{4} + r + r^2 = 1 - 2r + r^2 + \frac{1}{4}$$

$$3r = 1$$

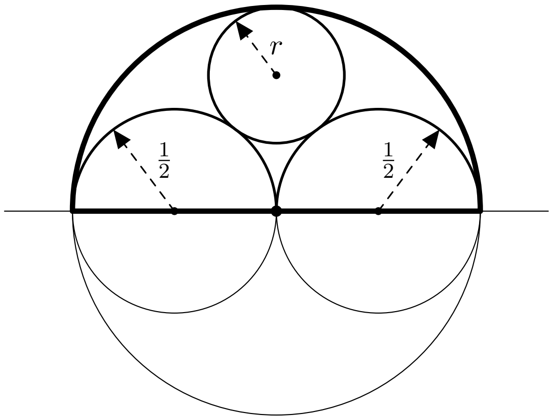
$$r = \frac{1}{3}$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

Második megoldás

Használjuk az érintkező körök tételét!



Ha az egységsugarú félkör átmérőjére tengelyesen tükrözzük a félköríveket, négy, egymást páronként érintő kört kapunk.

A sugaraik rendre:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ r$$

Az érintkező körök tétele szerint:

$$\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left[\left(-\frac{1}{1}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]$$

$$\left(-1+2+2+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(1+4+4+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\left(3+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(9+\frac{1}{r^2}\right)$$

$$9+\frac{6}{r}+\frac{1}{r^2} = 18+\frac{2}{r^2}$$

$$0 = \frac{1}{r^2}-\frac{6}{r}+9$$

$$0 = \left(\frac{1}{r}-3\right)^2$$

$$0 = \frac{1}{r}-3$$

$$r = \frac{1}{3}$$

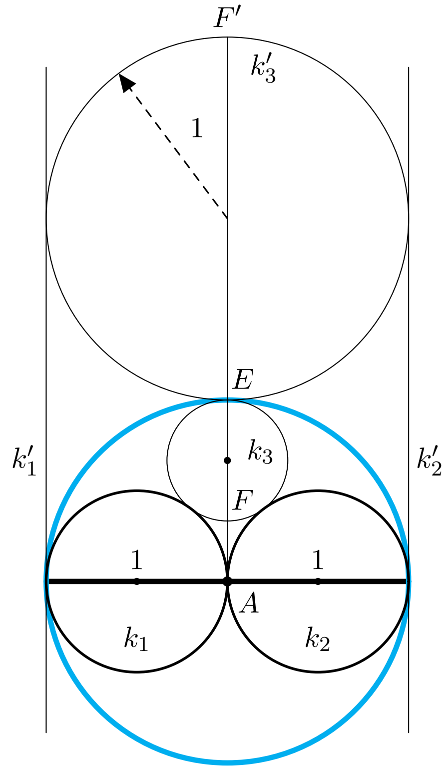
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

Harmadik megoldás

Használjunk inverziót!

Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú kör.



A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.

A k_3' kör átmérője k_1' és k_2' távolsága, azaz 2 egység.

Így a keresett kör invertált képének F' pontja 3 egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz $AF' = 3$.

A keresett kis kör F pontja eredeti helyén
$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{1}{3}$ távolságra volt a pólustól.

Így a keresett kör átmérője:

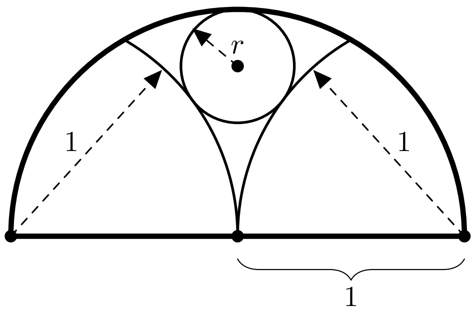
$$EF = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{3}.$$

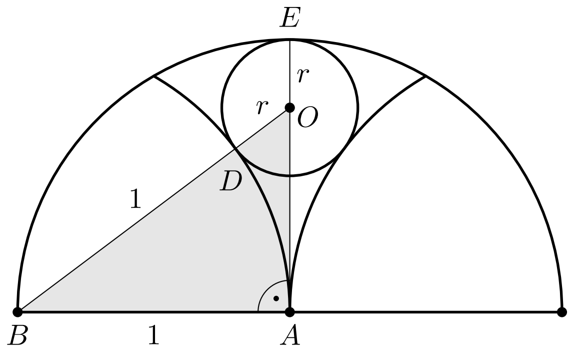
Gyűjtemény 6. feladata

Egy egység sugarú félkörbe megrajzolunk két, egység sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a három körívet?



Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OD.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Az AE szakasz merőleges a BA szakaszra a szimmetria miatt.

Mivel $BD = 1$, ezért

$$OB = 1 + r,$$

és $AE = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Írjunk fel OBA háromszögben Pitagorasz-tételt, majd rendezzük!

$$\begin{aligned} (1-r)^2 + 1^2 &= (1+r)^2 \\ 1 - 2r + r^2 + 1 &= 1 + 2r + r^2 \\ 1 &= 4r \\ r &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

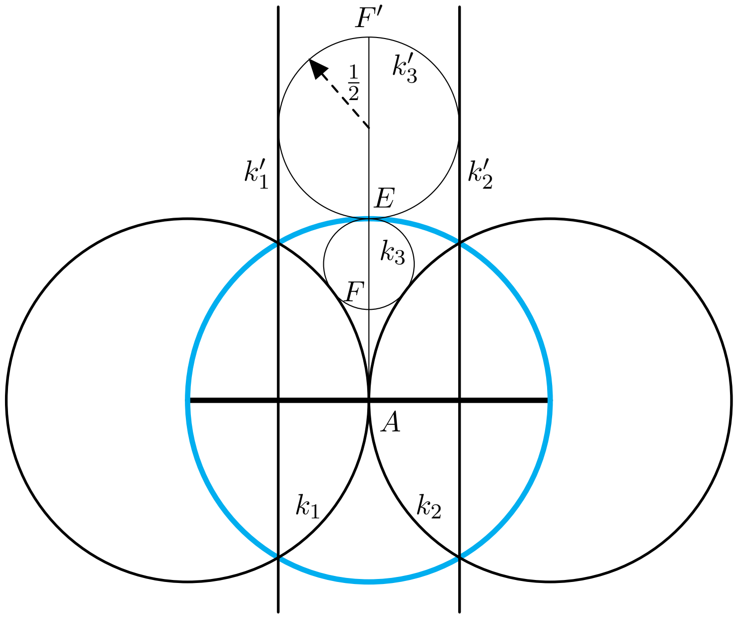
A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{4}.$$

Második megoldás

Oldjuk meg inverzióval!

Az inverzió alapköre legyen az adott, A középpontú egység sugarú kör.



A feladat ábráját erre a körre invertálva (és az egyes alakzatok képét vesszővel jelölve) kapjuk a mellékelt ábrát.

A k_1' és k_2' párhuzamos egyenesek távolsága $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Tehát az invertált kör átmérője 1.

Így pedig a keresett kör invertált képének F' pontja 2 egység távolságra van az inverzió pólusától, azaz $AF' = 2$.

A keresett kis kör F pontja tehát eredeti helyén

$$AF = \frac{1}{AF'} = \frac{1}{2}$$

távolságra volt a pólustól.

Így a keresett kis kör átmérője:

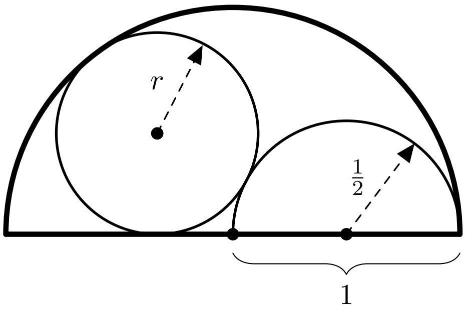
$$EF = AE - AF = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{1}{4}.$$

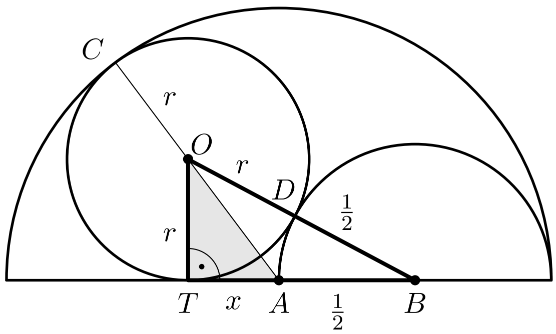
Gyűjtemény 7. feladata

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy $\frac{1}{2}$ sugarú félkört. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két körívet és a félkörcikk átmérőjét is az ábra szerint?



Első megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OT = OD = OC.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy a D ponton is.

Összekötjük az O és A pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a C ponton is.

Az OT sugár pedig merőleges TB érintőre.

Mivel $BD = \frac{1}{2}$, ezért

$$OB = r + \frac{1}{2},$$

és $AC = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Vezessünk be még egy változót, legyen:

$$x = TA.$$

És írjunk fel most már két Pitagorasz-tételt: OTA és OTB derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = (1-r)^2 \\ \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + r^2 = \left(r + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ x^2 + x + \dfrac{1}{4} + r^2 = r^2 + r + \dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

(2)-ből (1)-et kivonva és rendezve:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{4} &= r + \frac{1}{4} - 1 + 2r \\ x &= 3r - 1 \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve (1)-be:

$$\begin{aligned} (3r-1)^2 + r^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ 9r^2 - 6r + 1 + r^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ 9r^2 - 4r &= 0 \\ r\,(9r-4) &= 0 \\ r_1 = 0; \qquad r_2 &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

amelyekhez:

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

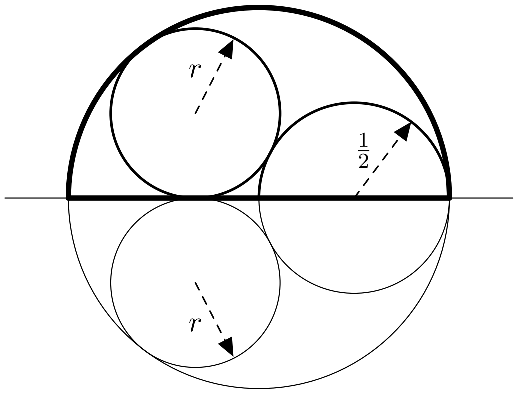
Mivel $r = 0$, ezért ez nem lehet a megoldás. Az eset elfajuló kör (az ábra jobb alsó sarkában).

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{4}{9}.$$

Második megoldás

Tükrözzük az ábrát az egységsugarú félkör átmérőjére és használjuk az érintkező körök tételét!



Látható a négy kör, melyek egymást páronként érintik. A sugaraik rendre:

$$1,\ \frac{1}{2},\ r,\ r.$$

Az érintkező körök tétele szerint:

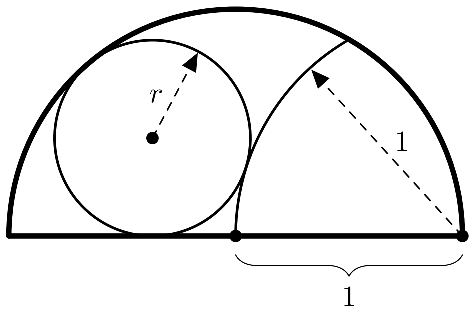
$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2 &= 2\left[\left(-\frac{1}{1}\right)^2+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]\\
\left(-1+2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\right)^2 &= 2\left(1+4+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\right)\\
\left(1+\frac{2}{r}\right)^2 &= 2\left(5+\frac{2}{r^2}\right)\\
1+\frac{4}{r}+\frac{4}{r^2} &= 10+\frac{4}{r^2}\\
\frac{4}{r} &= 9\\
r &= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

A keresett kör sugara:

$$r=\frac{4}{9}.$$

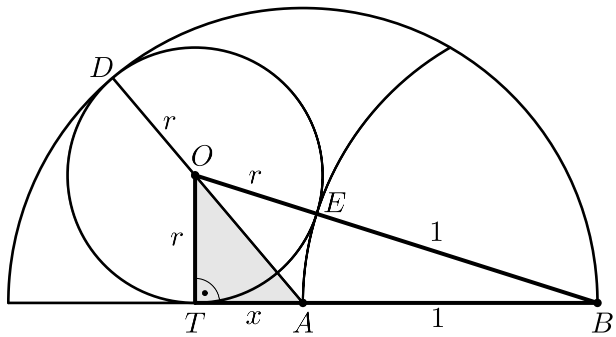
Gyűjtemény 8. feladata

Egy egység sugarú félkörcikkbe megrajzolunk egy egység sugarú körívet az ábra szerint. Mekkora annak a körnek az r sugara, amelyik érinti mind a két körívet és a félkörcikk átmérőjét is?



Megoldás

Használjuk az ábra jelöléseit!



Az ismeretlen kör sugara legyen

$$r = OE = OD = OF.$$

Összekötjük az O és B pontokat. Ez a szakasz átmegy az E ponton is.

Összekötjük az O és A pontokat is. E szakasz meghosszabbítása átmegy a D ponton is.

Az OT sugár pedig merőleges TB érintőre.

Mivel $BE = 1$, ezért

$$OB = r + 1,$$

és $AD = 1$, ezért

$$OA = 1 - r.$$

Vezessünk be még egy változót:

$$x = TA.$$

Mivel $AB = 1$, ezért

$$TB = x + 1.$$

És írjunk fel most már két Pitagorasz-tételt: OTA és OFB derékszögű háromszögekben!

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = (1-r)^2 \\ (x+1)^2 + r^2 = (r+1)^2 \end{cases}$$

Felbontva a zárójeleket:

$$\begin{cases} x^2 + r^2 = 1 - 2r + r^2 & (1) \\ x^2 + 2x + 1 + r^2 = r^2 + 2r + 1 & (2) \end{cases}$$

(2)-ből (1)-et kivonva és rendezve:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 4r \\ x &= 2r - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve (1)-be:

$$\begin{aligned} \left(2r - \frac{1}{2}\right)^2 + r^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ 4r^2 - 2r + \frac{1}{4} + r^2 &= 1 - 2r + r^2 \\ 4r^2 &= \frac{3}{4} \\ r^2 &= \frac{3}{16} \\ r_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}; \qquad r_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

amelyekhez

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}; \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

Mivel $r_2 < 0$, ezért ez nem lehet a megoldás.

A keresett kör sugara:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

.

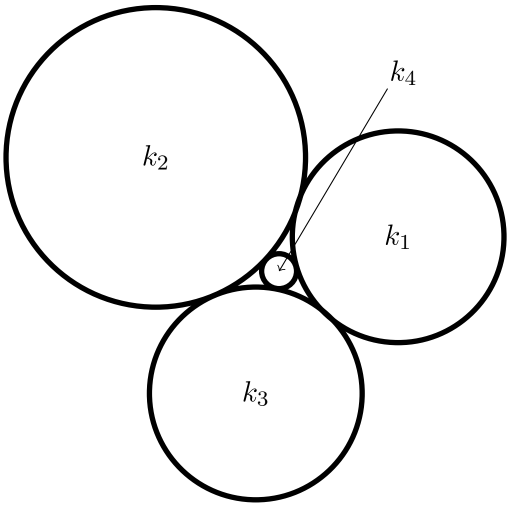
Használt összefüggések

A feladatok megoldása során használt összefüggések röviden a következők voltak.

Érintkező körök tétele (Descartes-tétel)

Ha négy kör olyan elhelyezkedésű:

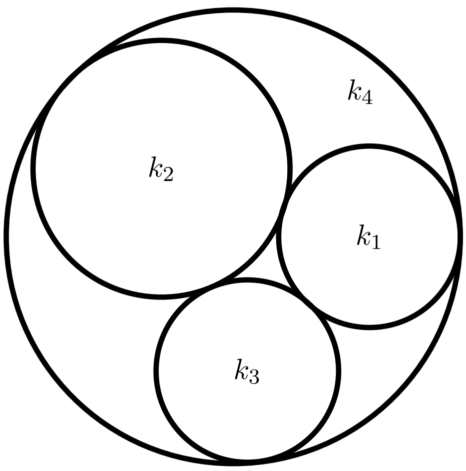
I. **páronként érintik kívülről egymást**



akkor a körök sugaraira fennáll az alábbi összefüggés:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

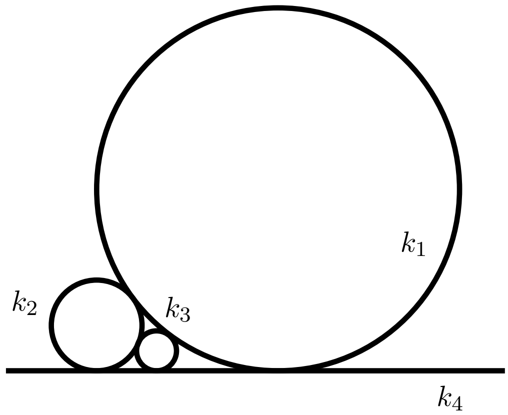
II. **páronként érintik egymást úgy, hogy az egyikük (k_4) tartalmazza a többit**



akkor a körök sugaraira fennáll az alábbi összefüggés:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)$$

III. **páronként érintik egymást úgy, hogy az egyikük (k_4) végtelen sugarú**



A végtelen sugár egy egyenest jelent. Ekkor a sugár reciproka nulla lesz a képletben.
A körök sugaraira itt is fennáll tehát az alábbi összefüggés:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}\right)$$

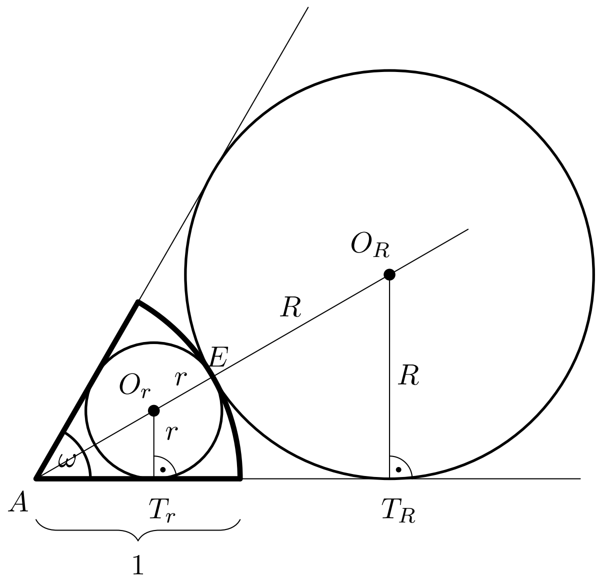
További információk : Coxeter: A geometriák alapjai c. könyv („nagy” Coxéter)

Körcikk és érintő köre

Egy egység sugarú ω szögű körcikkbe és hozzá érintő kört írunk. $(0° < \omega < 180°)$

A körök középpontjai r, illetve R távolságra vannak a körcikk mindkét szárától, vagyis rajta vannak a körcikk középponti szögének szögfelezőjén.

Használjuk az ábra jelöléseit !



Mivel $AE = 1$, ezért $AO_r = 1 - r$ és $AO_R = 1 + R$.

Belülről érintő kör

AT_rO_r háromszögben

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{r}{1-r}$$
$$(1-r)\cdot\sin\frac{\omega}{2} = r$$
$$\sin\frac{\omega}{2} = r + r\sin\frac{\omega}{2}$$
$$r = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1+\sin\frac{\omega}{2}}$$

Kívülről érintő kör

AT_RO_R háromszögben

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{R}{1+R}$$
$$(1+R)\cdot\sin\frac{\omega}{2} = R$$
$$\sin\frac{\omega}{2} = R - R\sin\frac{\omega}{2}$$
$$R = \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{1-\sin\frac{\omega}{2}}$$

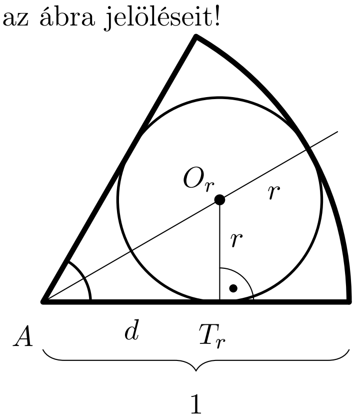
Megjegyzés

Érdemes megjegyezni:

- $\omega = 0°$ esetén mindkét összefüggés jó végeredményt ad,
- $\omega = 180°$ esetén csak a belülről érintő kör ad jó végeredményt.

Körcikkbe írt kör

Ha egy egység sugarú körcikkbe érintő kört írunk, az alábbi összefüggés állapítható meg. Használjuk az ábra jelöléseit!



AT_rO_r háromszögben Pitagorasz tételt felírva:

$$d^2 + r^2 = (1-r)^2$$
$$d^2 + r^2 = r^2 - 2r + 1$$
$$d^2 = 1 - 2r$$

Visszacsatolás

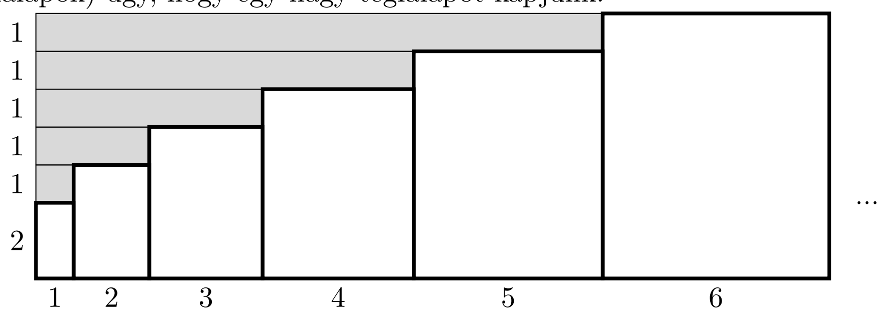
Az Úton-módon 3. cikkében levő feladattal kapcsolatban kaptam további megoldásokat, Tatár Zsuzsanna Mária kolléganő írt több megoldást. A megoldások küzül egyet kiválasztottam, amit most megmutatok.

A feladat

Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$; ahol $n \in \mathbb{N}^+$

Tatár Zsuzsanna Mária, Esztergom megoldása.

A keresett szorzatot tekintsük téglalapok területének (fehér téglalapok) és egészítsük ki (szürke téglalapok) úgy, hogy egy nagy téglalapot kapjunk.



A nagy téglalap oldalai $2 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$ és $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$.
Tehát a fehér téglalap területe:

$$(n+1) \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n \cdot (n+1)^2}{2}$$

A szürke téglalapok területe:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + \ldots 1 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}$$

amit teljes indukcióval könnyű bizonyítani.
Így a keresett kifejezés

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)^2}{2} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n \cdot (n+1)\,[2n-4]}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

Tehát

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.